

# Une version récursive de RCOMET pour l'estimation robuste de matrices de forme à structure convexe

B. MÉRIAUX<sup>1</sup>, C. REN<sup>1</sup>, A. BRELOY<sup>2</sup>, M. N. EL KORSO<sup>2</sup>, P. FORSTER<sup>3</sup>, J.-P. OVARLEZ<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>SONDRA, CentraleSupélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>LEME EA-4416, Université Paris-Nanterre, 50 rue de Sèvres, 92410, Ville d'Avray, France

<sup>3</sup>SATIE, Université Paris-Nanterre, 61 Avenue du Président Wilson, 94230, Cachan, France

<sup>4</sup>ONERA, DEMR/TSI, Chemin de la Hunière, 91123 Palaiseau, France

bruno.meriaux@centralesupelec.fr, chengfang.ren@centralesupelec.fr,  
abreloy@parisnanterre.fr, m.elkors@parisnanterre.fr,  
philippe.forster@parisnanterre.fr, jeanphilippe.ovarlez@centralesupelec.fr

**Résumé** – Ce papier porte sur l'estimation robuste de matrices de forme (covariance normalisée) structurées. Dans un contexte d'estimation robuste, nous introduisons un estimateur robuste et récursif de matrice de forme basé sur l'estimateur de Tyler. Nous prouvons que cet estimateur est consistant, asymptotiquement efficace et gaussien. Par ailleurs, nous constatons qu'il atteint son régime asymptotique d'autant plus rapidement que le nombre d'itérations augmente. Finalement, nous étudions la convergence des récursions pour la structure persymétrique hermitienne.

**Abstract** – This paper addresses robust estimation of structured shape (normalized covariance) matrices. In the framework of robust estimation, we introduce a recursive robust shape matrix estimation technique based on Tyler's M-estimate for convexly structured shape matrices. We prove that the proposed estimator is consistent, asymptotically efficient and Gaussian distributed and we notice that it reaches its asymptotic regime faster as the number of recursions increases. Finally, in the case of Hermitian persymmetric structure, we study the convergence of the recursions of the proposed algorithm.

## 1 Introduction

En traitement du signal adaptatif, la plupart des algorithmes existants nécessitent une estimée de la matrice de covariance des données. Selon l'application considérée, cette dernière possède en général une structure particulière en plus de son caractère hermitien défini positif [1]. La prise en compte de celle-ci dans le processus d'estimation permet d'améliorer la qualité de l'estimée [2]. Dans le contexte gaussien, ce problème a été largement étudié, avec par exemple la méthode de *Covariance Matching Estimation Technique* (COMET) [3]. Celle-ci fournit un estimateur asymptotiquement efficace mais étant basée sur la *Sample Covariance Matrix* (SCM), elle est sensible aux données aberrantes. Dans un cadre d'estimation robuste, la classe des distributions Complexes Elliptiquement Symétriques (CES) s'avère être bien adaptée pour modéliser des données impulsives [4]. Dans ce contexte, un estimateur robuste de la matrice de forme, dénommé estimateur de Tyler, a été proposé dans [5]. Plusieurs méthodes ont été proposées pour exploiter ce dernier dans le cadre de matrices de forme structurées [6, 7], dont la méthode *Robust COMET* (RCOMET) [8].

Dans ce papier, nous proposons une version Récursive de RCOMET (R-RCOMET) pour l'estimation de matrices de forme à structure convexe, pour laquelle nous menons une analyse

théorique des performances asymptotiques. Nous comparons son comportement non asymptotique avec celui de RCOMET. Finalement, nous analysons la convergence de R-RCOMET dans le cas particulier des matrices de forme persymétriques hermitiennes.

## 2 Formalisation du problème

Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$  un vecteur aléatoire suivant une loi CES centrée de matrice de dispersion  $\mathbf{M}$  [9]. Le vecteur normalisé  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , suit alors une distribution Complexe Angulaire Elliptique (CAE), notée par  $\mathbf{y} \sim \mathcal{U}_m(\mathbf{M})$  dont la densité de probabilité s'écrit [7]

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{M}) \propto |\mathbf{M}|^{-1} (\mathbf{y}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y})^{-m} \quad (1)$$

où la matrice  $\mathbf{M}$  est définie à un facteur d'échelle près. Pour lever l'ambiguïté,  $\mathbf{M}$  est normalisée selon  $\text{Tr}(\mathbf{M}) = m$ . On désigne la matrice  $\mathbf{M}$  comme la matrice de forme de  $\mathbf{y}$ .

Soit un  $N$ -uplet de données i.i.d. selon une loi CAE,  $\mathbf{y}_n \sim \mathcal{U}_m(\mathbf{M}_e)$ ,  $n = 1, \dots, N$  avec  $N > m$ . L'estimateur de Tyler est la solution de l'équation au point-fixe suivant [5] :

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} = \frac{m}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H}{\mathbf{y}_n^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}^{-1} \mathbf{y}_n} \triangleq \mathcal{H}(\hat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}) \quad (2)$$

L'existence et l'unicité à un facteur d'échelle près de cette solution ont été étudiées dans [10]. Dans la suite, l'ambiguïté d'échelle est levée en fixant la trace  $\text{Tr}[\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}] = m$ . En pratique,  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  est obtenu par l'algorithme itératif  $\mathbf{M}_{k+1} = \mathcal{H}(\mathbf{M}_k)$ . De plus,  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  est un estimateur consistant, non biaisé de  $\mathbf{M}_e$  dont la distribution asymptotique est donnée dans [9, 11].

On suppose maintenant que la matrice de forme appartient à un sous-ensemble convexe  $\mathcal{S}$  des matrices hermitiennes définies positives et qu'il existe une paramétrisation bijective différentiable  $\boldsymbol{\mu} \mapsto \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})$  de  $\mathbb{R}^p$  vers  $\mathcal{S}$ . On cherche à estimer  $\boldsymbol{\mu}$ , de vraie valeur  $\boldsymbol{\mu}_e$ , tel que  $\mathbf{M}_e = \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu}_e)$ . On rappelle que  $\text{Tr}[\mathbf{M}_e] = m$ . L'estimateur RCOMET, noté  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$ , de  $\boldsymbol{\mu}_e$  est obtenu par [8]

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 = \arg \min_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} \text{Tr} \left[ \left\{ \left( \widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} - \alpha \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu}) \right) \widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}^{-1} \right\}^2 \right] \quad (3)$$

avec  $\alpha > 0$  et satisfaisant  $\text{Tr}[\mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)] = m$ . Nous avons montré que  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$  est un estimateur consistant de  $\boldsymbol{\mu}_e$  (respectivement  $\mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{M}_e$ ), asymptotiquement efficace et gaussien [8] :

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 - \boldsymbol{\mu}_e) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{BCR}_{\text{CAE}}) \quad (4)$$

où  $\mathbf{BCR}_{\text{CAE}}$ , désignant la borne de Cramér-Rao (BCR), est donnée dans [8].

Bien qu'asymptotiquement efficace, la méthode RCOMET requiert un nombre important de données pour atteindre son régime asymptotique. Dans ce papier, nous proposons une version récursive de RCOMET pour laquelle une analyse théorique des performances asymptotiques est conduite. Par ailleurs, nous montrons la convergence de R-RCOMET dans un cas particulier : la structure persymétrique hermitienne.

## 3 Méthode : Recursive RCOMET

### 3.1 Algorithme et performances asymptotiques

Dans le critère RCOMET (3),  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  joue à la fois le rôle de matrice cible et de pondération définissant une métrique via son inverse. En séparant ces rôles, on peut proposer une implémentation récursive de RCOMET où la métrique est raffinée à chaque étape. Pour un nombre fini d'itérations,  $K$ , l'estimateur R-RCOMET  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K$  de  $\boldsymbol{\mu}$  s'obtient à la  $k^{\text{ième}}$  étape en résolvant, pour  $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k = \arg \min_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} \text{Tr} \left[ \left\{ \left( \widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} - \alpha \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu}) \right) \mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1})^{-1} \right\}^2 \right] \quad (5)$$

avec  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$  donné par (3) et tel que  $\text{Tr}[\mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K)] = m$ . L'algorithme R-RCOMET est résumé dans l'encadré Algorithme 1.

**Lemme 1.** Soit  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$  la solution de

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \arg \min_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} \text{Tr} \left[ \left\{ \left( \widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} - \alpha \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu}) \right) \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \right\}^2 \right] \quad (6)$$

où  $\widehat{\mathbf{M}}$  désigne n'importe quel estimateur consistant de  $\mathbf{M}_e$  à un facteur d'échelle près, i.e.,  $\widehat{\mathbf{M}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \kappa \mathbf{M}_e$ ,  $\kappa > 0$ . Alors, on a

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \boldsymbol{\mu}_e \text{ et } \sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_e) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{BCR}_{\text{CAE}})$$

---

### Algorithme 1 R-RCOMET

---

**Entrées :**  $\mathbf{y}_n \sim \mathcal{U}_m(\mathbf{M}_e)$ ,  $n = 1 \dots N$  i.i.d.,  $N > m$ ,  $K \geq 1$

- 1: Calculer  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  à partir de  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  avec (2)
- 2: Initialiser  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$  avec (3)
- 3: **pour**  $k = 1$  à  $K$
- 4: Calculer  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k$  à partir de (5)
- 5: **fin**
- 6: **Sortie :**  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K$

---

*Preuve.* L'estimée  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$  est une fonction continue de  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}$ , notée  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = g(\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}, \widehat{\mathbf{M}})$  et vérifiant  $g(\mathbf{M}_e, \kappa \mathbf{M}_e) = \boldsymbol{\mu}_e$ . La consistance de  $\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}$  vers  $\mathbf{M}_e$  [11] (respectivement celle de  $\widehat{\mathbf{M}}$  vers  $\kappa \mathbf{M}_e$ , pour tout  $\kappa > 0$ ) implique  $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = g(\widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}, \widehat{\mathbf{M}}) \xrightarrow{\mathcal{P}} g(\mathbf{M}_e, \kappa \mathbf{M}_e) = \boldsymbol{\mu}_e$  et donc  $\mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{M}(\boldsymbol{\mu}_e)$ . En utilisant la méthode delta [12, Chapitre 3], on peut montrer que

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_e) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_\mu) \quad (7)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$  est indépendante de  $\kappa$ . L'estimateur RCOMET étant un cas particulier du problème considéré (6) avec  $\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{M}_e$ , nous obtenons finalement de (4) que  $\boldsymbol{\Gamma}_\mu = \mathbf{BCR}_{\text{CAE}}$ . ■

**Théorème 1.** Soit  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K$  l'estimateur R-RCOMET de  $\boldsymbol{\mu}_e$  obtenu avec l'Algorithme 1. Alors, on a

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K \xrightarrow{\mathcal{P}} \boldsymbol{\mu}_e \text{ et } \sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_K - \boldsymbol{\mu}_e) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{BCR}_{\text{CAE}})$$

*Preuve.* En appliquant le Lemme 1 à chaque itération, le théorème en découle immédiatement, car  $\mathcal{M}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{M}_e$  pour  $k \geq 0$ . ■

Finalement pour  $K \geq 1$  fini, R-RCOMET a les mêmes performances asymptotiques que RCOMET. L'intérêt pratique est qu'il améliore le plus souvent les performances à distance finie. La convergence de R-RCOMET pour  $K \rightarrow \infty$  requiert une étude au cas par cas selon la structure considérée. Dans la suite, la convergence de R-RCOMET est établie pour la structure persymétrique hermitienne, i.e., les matrices appartenant à l'ensemble  $\left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^H \text{ et } \mathbf{A} = \mathbf{J}_m \mathbf{A}^T \mathbf{J}_m \right\}$  avec  $\mathbf{J}_m$  la matrice antidiagonale unité de taille  $m$ .

### 3.2 Convergence pour la structure persymétrique hermitienne

La paramétrisation naturelle et minimale d'une matrice persymétrique hermitienne de taille  $m$  est de considérer les parties réelle et imaginaire des éléments  $M_{r,s}$  de  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})$  satisfaisant  $s \geq r$  et  $s \leq m + 1 - r$ . Il existe alors une matrice de rang plein  $\mathcal{J} \in \mathbb{C}^{m^2 \times p}$  avec  $p = \frac{m(m+1)}{2}$  telle que

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\mu}) = \text{vec}(\mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})) = \mathcal{J}\boldsymbol{\mu} \quad (8)$$

Cette matrice possède une pseudo-inverse gauche  $\mathcal{J}^\dagger$  telle que  $\mathcal{J}^\dagger = \left( \mathcal{J}^H \mathcal{J} \right)^{-1} \mathcal{J}^H$  et  $\mathcal{J}^\dagger \mathcal{J} = \mathbf{I}_p$ .

**Proposition 1.** Soit  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{A}$ , où  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  est persymétrique hermitienne et  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker. Alors  $(\mathcal{J}^H \mathbf{W}^{-1} \mathcal{J})^{-1} = \mathcal{J}^\dagger \mathbf{W} \mathcal{J}^{\dagger H}$ .

*Preuve.* Voir en Annexe ■

**Corollaire 1.** Soit  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_K$  la R-RCOMET estimée de  $\boldsymbol{\mu}_e$ . Alors,

$$\forall K \in \mathbb{N}^* \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_K = \mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{FP}} \quad (9)$$

*Preuve.* Pour  $K = 1$ , l'estimateur R-RCOMET s'écrit

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \propto (\mathcal{J}^H \hat{\mathbf{W}}_0^{-1} \mathcal{J})^{-1} \mathcal{J}^H \hat{\mathbf{W}}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$$

où  $\hat{\mathbf{W}}_0 = \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0)^T \otimes \mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0)$  et  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$  est donné par (3). D'après la Proposition 1,  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1$  se réécrit comme  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \propto \mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$ . Pour satisfaire  $\text{Tr}[\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1)] = m$ , nécessairement  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$ . On peut montrer par récurrence que  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \dots = \hat{\boldsymbol{\mu}}_K = \mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$  pour tout  $K \in \mathbb{N}^*$ . Par conséquent, la méthode R-RCOMET converge en une seule étape pour la structure persymétrique hermitienne. ■

$\mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$  peut être interprété comme la projection euclidienne de l'estimateur de Tyler sur l'espace des matrices persymétriques hermitiennes, en effet :

$$\mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}} = \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}} - \boldsymbol{\mu}\|^2 \text{ s.t. } \text{Tr}[\mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})] = m \quad (10)$$

L'estimateur R-RCOMET coïncide ainsi étonnamment avec la projection euclidienne de l'estimateur de Tyler dans le cas des matrices persymétriques hermitiennes.

## 4 Résultats numériques

Cette partie illustre les résultats de l'analyse théorique précédente pour les structures persymétrique hermitienne et Toeplitz hermitienne et on compare avec des algorithmes de l'état de l'art pour  $m = 8$  sur 5000 Monte-Carlo.

Tout d'abord, on considère la structure persymétrique hermitienne pour laquelle on compare les performances de RCOMET, R-RCOMET, l'estimateur Point-Fixe Persymétrique noté PFP [6], et l'estimateur Persymétrique basé sur la SCM, noté PSCM. Ce dernier est obtenu en remplaçant l'estimateur de Tyler de l'estimateur PFP par la SCM. Enfin, la BCR associée,  $\text{BCR}_{\mathcal{U}}$ , est tracée pour la comparaison [7].

Sur la Fig. 1, on remarque que les estimateurs R-RCOMET et RCOMET atteignent la BCR. De plus, R-RCOMET est bien identique pour 1 et 2 itérations et semble aussi coïncider avec l'estimée PFP. L'estimateur PSCM n'est pas performant car la SCM calculée sur des données CAE est biaisée [11].

*Remarque:* On peut montrer théoriquement que les estimateurs R-RCOMET et PFP sont identiques, puisque  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{PFP}}$  donné dans [6] peut s'exprimer par

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{PFP}} = \mathcal{J}^\dagger (\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{T}^H) \text{vec} \left( \frac{1}{2} \left[ \mathbf{T} \hat{\mathbf{M}}_{\text{FP}} \mathbf{T}^H + \mathbf{T}^* \hat{\mathbf{M}}_{\text{FP}}^T \mathbf{T}^T \right] \right) = \mathcal{J}^\dagger \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{FP}}$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice unitaire telle que  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{J}_m$  [6].

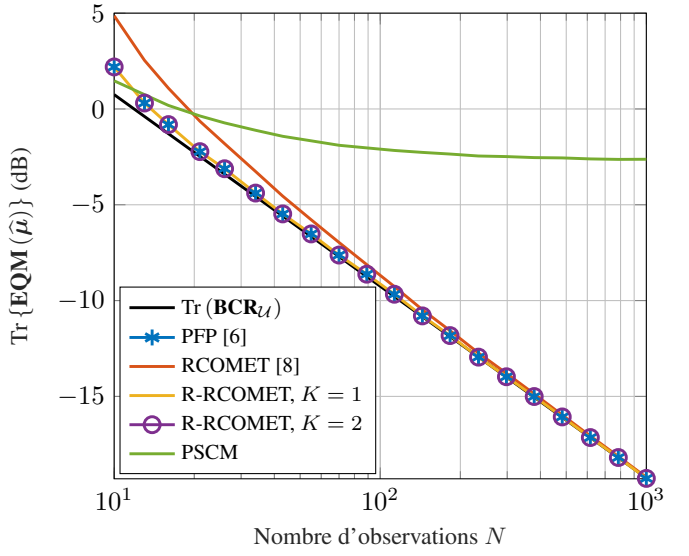


Fig. 1 – Comparaison pour la structure persymétrique hermitienne

Ensuite, on considère la structure Toeplitz hermitienne. Dans ce cas, la paramétrisation minimale consiste à prendre les parties réelle et imaginaire de la première ligne de la matrice  $\mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})$ . Il existe aussi une matrice de rang plein  $\mathcal{J}_1 \in \mathbb{C}^{m^2 \times p}$  avec  $p = 2m - 1$  telle que  $\text{vec}(\mathcal{M}(\boldsymbol{\mu})) = \mathcal{J}_1 \boldsymbol{\mu}$ . Il est important de remarquer que la matrice  $\mathcal{J}_1$  pour les matrices Toeplitz hermitiennes est différente de celle pour les matrices persymétriques hermitiennes, puisque le nombre minimal de RCOMET, R-RCOMET pour différentes valeurs de  $K$ , la projection euclidienne de l'estimateur de Tyler ainsi que l'estimateur COCA [7]. La BCR associée est aussi tracée pour la comparaison [8].

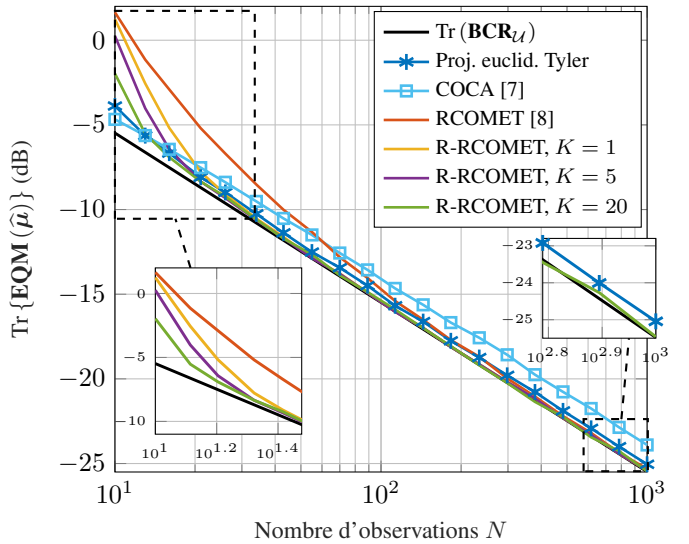


Fig. 2 – Comparaison pour la structure Toeplitz hermitienne

Sur la Fig. 2, on peut voir l'efficacité asymptotique de R-RCOMET et RCOMET. Comme déjà mentionné, on note que

la BCR est atteinte plus vite par R-RCOMET que RCOMET, et ce, d'autant plus que le nombre d'itération  $K$  augmente. Aussi dans ce cas R-RCOMET ne correspond plus à la projection euclidienne de l'estimateur de Tyler. Enfin, l'estimateur COCA est consistant mais pas efficace [7]. Ce dernier montre son intérêt à faible nombre d'observations, cependant il souffre d'un coût calculatoire important. R-RCOMET offre alors un compromis intéressant entre performance et temps de calcul.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons introduit une version récursive de RCOMET pour les matrices de forme à structure convexe. Nous avons prouvé que l'estimateur proposé est consistant, asymptotiquement efficace et gaussien. De plus, les simulations montrent un gain dans les performances non asymptotiques de R-RCOMET par rapport à celles de RCOMET. Dans le cas particulier de la structure persymétrique hermitienne, nous avons étudié la convergence de R-RCOMET.

## 6 Annexe

Cette annexe donne la preuve de la Proposition 1, qui nécessite le lemme suivant.

**Lemme 2.** Soit  $\mathcal{J}$  la matrice définie par (8), de pseudo-inverse  $\mathcal{J}^\dagger = (\mathcal{J}^H \mathcal{J})^{-1} \mathcal{J}^H$ . Alors, on a l'égalité suivante

$$\mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m) \quad (11)$$

où  $\mathbf{K}_m$  est la matrice de commutation [13].

*Preuve.* Introduisons  $\mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m)$  et  $\mathbf{P}_{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger$  deux projecteur sur l'image de  $\mathcal{J}$ . On a  $\mathbf{P}_{\mathcal{J}}$  de rang  $p = \frac{m(m+1)}{2}$  et  $\mathbf{Q} \mathbf{P}_{\mathcal{J}} = \mathbf{P}_{\mathcal{J}}$ . Pour avoir  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\mathcal{J}}$ , il faut alors montrer que  $\text{rang}(\mathbf{Q}) = p$ . En analysant les colonnes de la matrice  $\mathbf{K}_m + \mathbf{J}_{m^2}$ , on peut montrer que  $\text{rang}(\mathbf{Q}) = p$ , d'où l'équation (11). De plus, en multipliant à droite par  $\mathcal{J}$  l'équation (11), on obtient  $\mathcal{J} = \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m \mathcal{J}$ . ■

*Preuve de la Proposition 1.* Introduisons  $\mathbf{X} = \mathcal{J}^H \mathbf{W}^{-1} \mathcal{J}$  et  $\mathbf{Y} = \mathcal{J}^\dagger \mathbf{W} \mathcal{J}^{\dagger H}$ . Selon le Lemme 2, on a

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} = \mathcal{J}^H \mathbf{W}^{-1} \mathcal{J} \mathcal{J}^\dagger \mathbf{W} \mathcal{J}^{\dagger H} = \frac{1}{2} \mathcal{J}^H [\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m \mathbf{W}] \mathcal{J}^{\dagger H}$$

Ensuite, il est facile de montrer que  $\mathbf{W}^{-1}$  est persymétrique hermitienne d'où  $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m \mathbf{W} = \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m$ . Ainsi, on obtient

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} = \frac{1}{2} \mathcal{J}^H [\mathbf{I}_{m^2} + \mathbf{J}_{m^2} \mathbf{K}_m] \mathcal{J}^{\dagger H} = \mathbf{I}_p = \mathbf{Y} \mathbf{X} \quad \blacksquare$$

## Remerciements

B. Mériaux remercie la D.G.A. ainsi que le projet ANR ASTRID, n° ANR-17-ASTR-0015, pour leur support financier.

## Références

- [1] M. Haardt, M. Pesavento, F. Röemer, and M. N. El Korso, "Subspace methods and exploitation of special array structures," in *Array and Statistical Signal Processing*, ser. Academic Press Library in Signal Processing. Elsevier, Jan. 2014, vol. 3, ch. 15, pp. 651–717.
- [2] T. A. Barton and D. R. Fuhrmann, "Covariance structures for multidimensional data," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 4, no. 2, pp. 111–123, 1993.
- [3] B. Ottersten, P. Stoica, and R. Roy, "Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications," *ELSEVIER Digital Signal Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 185–210, 1998.
- [4] K. J. Sangston, F. Gini, and M. S. Greco, "Adaptive detection of radar targets in compound-Gaussian clutter," in *Proc. of IEEE Radar Conference*, May, 2015, pp. 587–592.
- [5] D. E. Tyler, "A distribution-free M-estimator of multivariate scatter," *The Annals of Statistics*, vol. 15, no. 1, pp. 234–251, 1987.
- [6] G. Pailloux, P. Forster, J.-P. Ovarlez, and F. Pascal, "Persymmetric adaptive radar detectors," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 47, no. 4, pp. 2376–2390, Oct. 2011.
- [7] I. Soloveychik and A. Wiesel, "Tyler's covariance matrix estimator in elliptical models with convex structure," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 20, pp. 5251–5259, Oct. 2014.
- [8] B. Mériaux, C. Ren, M. N. El Korso, A. Breloy, and P. Forster, "Robust-COMET for covariance estimation in convex structures : algorithm and statistical properties," in *Proc. of IEEE CAMSAP*, Dec. 2017, pp. 1–5.
- [9] E. Ollila, D. E. Tyler, V. Koivunen, and H. V. Poor, "Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, Nov. 2012.
- [10] F. Pascal, Y. Chitour, J.-P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "Covariance structure maximum-likelihood estimates in compound-Gaussian noise : Existence and algorithm analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 1, pp. 34–48, Jan. 2008.
- [11] F. Pascal, P. Forster, J.-P. Ovarlez, and P. Larzabal, "Performance analysis of covariance matrix estimates in impulsive noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 6, pp. 2206–2217, Jun. 2008.
- [12] A. W. Van der Vaart, *Asymptotic Statistics (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)*. Cambridge University Press, Jun. 2000, vol. 3.
- [13] J. R. Magnus and H. Neudecker, "The commutation matrix : some properties and applications," *The Annals of Statistics*, vol. 7, no. 2, pp. 381–394, Mar. 1979.