

Analyse Temps-Fréquence Quadratique III : La Classe Affine et Autres Classes Covariantes

J.P. Ovarlez, P. Gonçalves, R. Baraniuk¹

Résumé : Les distributions temps-fréquence affines ont fait leur apparition vers le milieu des années 80 avec l'émergence de la théorie des ondelettes. Construites sur le principe de covariance du groupe affine, un groupe physique beaucoup plus général que celui des translations en temps et en fréquence, elles étendent naturellement la théorie des distributions temps-fréquence conventionnelles de la classe de Cohen pour la catégorie de signaux dits "large-bande". L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes approches de construction et les outils associés proposés aux cours des dernières années et qui ont favorisé l'émergence de nouvelles techniques mathématiques en traitement du signal : théorie des groupes, théorie des opérateurs.

Mots-clés : Temps-Fréquence Affine, Ondelettes.

1. Introduction Générale

La notion de représentation temps-fréquence affine a été introduite pour la première fois en 1985 [BER 85] donnant lieu à ce que l'on nomme maintenant la distribution affine unitaire. Cette distribution, construite initialement par tomographie, joue un rôle central dans l'étude des représentations affines. Dans le même temps et parallèlement est apparue la théorie ondelettes, basée sur

¹J.P. Ovarlez, ONERA, DEMR/TSI, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, FRANCE, ovarlez@onera.fr

P. Gonçalves - INRIA Rhône Alpes, ZIRST, 655 av. de l'Europe, 38 334 St. Ismier, Paulo.Goncalves@inrialpes.fr

R. G. Baraniuk, Dept. Elec. and Computer Eng., Rice University, P.O.Box 1892, Houston, TX 77251-1892, USA, richb@rice.edu

un même formalisme de déformation des signaux : contraction-dilatations et translation temporelle [GRO 84]. Il s'avère en fait que la transformation en ondelettes est directement reliée aux représentations temps-fréquence affines par une opération de lissage dans le plan temps-fréquence, ce qui confère à celles-ci une grande importance dans l'analyse des signaux. D'un abord *a priori* complexe, le premier mode de détermination ou de construction de ces distributions est basé sur la théorie des groupes [BER 91, BER 92], outil assez récent en analyse de signal et qui n'a pas contribué à la même popularité que présentait l'étude des distributions de la classe de Cohen [COH 66]. Une deuxième approche [RIO 92], plus accessible, s'est basée sur une opération de lissage affine des distributions de la classe de Cohen. Ce chapitre présente ces deux différentes approches qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients et qui sont à la base de l'émergence de nouvelles techniques mathématiques en traitement du signal.

2. Construction Générale de la Classe Affine

2.1. *Bilinéarité des distributions*

En suivant les lignes de construction de la classe de Cohen présentée au chapitre [AUG 01], nous décrivons ici les principes qui permettent de définir la classe affine des représentations bilinéaires temps-fréquence. Comme c'est le cas pour la classe de Cohen, nous nous intéressons aux distributions énergétiques des signaux, et les arguments développés dans le chapitre [FLA 01] justifient le choix naturel (bien que non nécessaire) de formes bilinéaires sur le signal analysé. Nous rappelons donc succinctement quelques uns de ces arguments. Soit z un signal complexe de $L^2(\mathcal{R})$ et Z sa transformée de Fourier. L'énergie de z est donnée par la norme quadratique suivante :

$$E_z = \int z(t)z^*(t) dt = \int Z(f)Z^*(f) df. \quad (1)$$

Les représentations temps-fréquence énergétiques notées $\rho_z(t, f)$, se présentent comme un intermédiaire hybride entre les deux distributions énergétiques que sont la puissance instantanée $P_z(t) := z(t)z^*(t)$ et la densité spectrale $\gamma_z(f) := Z(f)Z^*(f)$. En combinant les deux variables t et f , $\rho_z(t, f)$ décrit (topographiquement) comment l'énergie de z se répartie dans le plan temps-fréquence. On attend alors naturellement de ces distributions conjointes qu'elles conservent l'énergie totale du signal

$$E_z = \iint \rho_z(t, f) dt df, \quad (2)$$

sans pour autant imposer que les distributions marginales de celles-ci, $\int \rho_z(t, f) df$ et $\int \rho_z(t, f) dt$, soient systématiquement égales à la puissance instantanée $P_z(t)$, et à la densité spectrale $\gamma_z(f)$, respectivement.

Conformément aux chapitres [FLA 01] et [AUG 01], nous convenons d'écrire ces distributions énergétiques bilinéaires sous une forme générique s'exprimant indifféremment à partir du signal en temps ou en fréquence selon

$$\rho_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_1, t_2; t, f) z(t_1) z^*(t_2) dt_1 dt_2 \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(f_1, f_2; t, f) Z(f_1) Z^*(f_2) df_1 df_2, \quad (4)$$

Dans ces expressions, $z(t_1) z^*(t_2)$ (respectivement $Z(f_1) Z^*(f_2)$) est appelée la *partie utile* du signal et $K(t_1, t_2; t, f)$ (respectivement $\hat{K}(f_1, f_2; t, f)$) est un noyau arbitraire de paramétrisation caractérisant entièrement les propriétés de la distribution $\rho_z(t, f)$. Les deux formes $K(t_1, t_2; t, f)$ et $\hat{K}(f_1, f_2; t, f)$ sont reliées par la double transformation de Fourier :

$$K(t_1, t_2; t, f) = \iint \hat{K}(f_1, f_2; t, f) e^{-2i\pi(f_1 t_1 - f_2 t_2)} df_1 df_2. \quad (5)$$

La contrainte de conservation de l'énergie spécifie un peu plus le noyau de paramétrisation K qui doit alors vérifier la condition

$$\iint K(t_1, t_2, t, f) dt df = \delta(t_1 - t_2), \quad (6)$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac.

Un exemple simple de représentation bilinéaire temps-fréquence est fourni par le module carré d'une décomposition linéaire (projection sur la fonction d'analyse $g(u, t, f)$ centrée autour de la date t et de la fréquence f), en effet

$$\left| \int x(u) g(u, t, f) du \right|^2 = \iint x(u) x^*(u') \underbrace{g^*(u, t, f) g(u', t, f)}_{K(u, u', t, f)} du du' = \rho_z(t, f). \quad (7)$$

C'est notamment le cas pour le spectrogramme (module carré de la transformée de Fourier à court terme) qui appartient en l'occurrence à la classe de Cohen [AUG 01].

2.2. Principe de Covariance

Pour isoler des sous-classes de solutions parmi l'ensemble des représentations bilinéaires possibles, on peut contraindre la structure du noyau arbitraire

K paramétrant la forme générique (3), en imposant aux distributions de vérifier certaines propriétés analytiques. Par exemple, la contrainte (6) garantit déjà que la distribution associée préserve l'énergie du signal analysé. Une autre contrainte qui paraît naturelle en traitement du signal est celle de covariance des distributions relativement à certaines transformations subies par le signal. Ainsi, si l'on désigne par \mathcal{T} un opérateur quelconque de $L^2(\mathcal{R}) \rightarrow L^2(\mathcal{R})$ agissant dans l'espace des signaux et par $\widehat{\mathcal{T}}$ l'opérateur associé agissant sur l'espace $L(\mathcal{R}^2)$ des distributions bilinéaires temps-fréquence, imposer un principe de covariance relativement à ces opérateurs se traduit par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} z & \rightarrow & \rho_z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}z & \rightarrow & \rho_{\mathcal{T}z} = \widehat{\mathcal{T}}\rho_z. \end{array} \quad (8)$$

À un choix particulier de l'opérateur \mathcal{T} (et de son dual $\widehat{\mathcal{T}}$) correspond alors une classe de représentations ρ_z , solution du principe de covariance (8) associé.

2.2.1. Covariance par translations en temps et en fréquence

Un premier choix naturel en traitement du signal pour l'opérateur \mathcal{T} est celui des translations en temps et en fréquence car celles-ci jouent un rôle central pour les systèmes linéaires invariants en temps et les modulations de fréquence. Cet opérateur agit sur le signal selon $\mathcal{T}z(t) = z(t - t_0)e^{-2i\pi f_0 t}$ et son dual sur l'espace des représentations transforme ρ_z suivant $\widehat{\mathcal{T}}\rho_z(t, f) = \rho_z(t - t_0, f - f_0)$. Quand on résout en ρ_z le diagramme de covariance (8) associé, l'ensemble des solutions se réduit aux noyaux de la forme $K(t_1, t_2; t, f) = K(t_1 - t, t_2 - t; 0, 0)e^{-2i\pi f(t_1 - t_2)}$, définissant ainsi la classe de Cohen des représentations temps-fréquence [COH 66] (voir aussi le chapitre [AUG 01]). Avec cette forme particulière de noyau ne dépendant plus que de deux variables, l'expression initiale (3) peut se réécrire sous la forme d'un double filtrage

$$\rho_z(t, f) = \iint W_z(s, \xi) \Pi(s - t, \xi - f) ds d\xi, \quad (9)$$

où W_z correspond à la distribution de Wigner-Ville

$$W_z(t, f) := \int z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (10)$$

et Π provient de la reparamétrisation $\Pi(t, f) = \int K(t + \tau, t - \tau; 0, 0) e^{-4i\pi f\tau} d\tau$. Rappelons toutefois qu'il existe plusieurs formulations possibles de cette classe, nous renvoyons à [FLA 93] pour une liste détaillée.

2.2.2. Covariance par le groupe affine

Le changement d'échelle (dilatation/compression) est un autre opérateur à l'origine d'une abondante littérature en mathématique, et qui depuis un passé plus ou moins récent suscite un intérêt croissant en analyse du signal. Tout d'abord utilisé pour modéliser un certain nombre de transformations physiques naturelles des signaux, comme l'effet Doppler, son usage s'est ensuite étendu avec le développement des techniques d'ondelettes [GRO 84, MAL 89] et de l'analyse fractale [MAN 68].

Reformulée dans le cadre temps (translation) et échelle (changement), la covariance (8) qui nous intéresse repose alors sur le groupe affine noté $A(a, b)$ (a réel positif, b réel) de loi de composition interne $(a, b)(a', b') = (aa', b + ab')$, et dont l'action sur $L^2(\mathcal{R})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad t &\longrightarrow at + b \quad (\text{changement d'horloge}) \\ z(t) &\longrightarrow z_{a,b}(t) = a^{-1/2} z(a^{-1}(t - b)) \\ Z(f) &\longrightarrow Z_{a,b}(f) = a^{1/2} e^{-2i\pi f b} Z(af). \end{aligned} \quad (11)$$

Dans le plan temps-fréquence, la contrainte de covariance s'écrit alors

$$\widehat{\mathcal{T}} : \rho_z(t, f) \longrightarrow \rho_{z_{a,b}}(t, f) = \rho_z(a^{-1}(t - b), af). \quad (12)$$

Remarque 1. Comme nous l'avons dit, les opérateurs du groupe affine (changement d'échelle et translation en temps) permettent de décrire mathématiquement l'effet Doppler dû à l'émission d'une onde par une source en déplacement, et le temps de propagation de cette onde jusqu'à la cible. Dans le cas limite des signaux à bande étroite, on peut cependant approximer au premier ordre l'effet de la dilatation (ou de la compression) par une simple translation fréquentielle du contenu spectral de l'onde émise. Suivant ce même raisonnement, on peut alors s'attendre à ce que les représentations $\rho_z(t, f)$, solutions du principe de covariance affine (12), se comportent en limite bande étroite comme des distributions de la classe de Cohen. ♣

Remarque 2. Appliquons la transformation affine (11) ($b = 0$) à une fonction monomodale $\Psi(f)$ localisée dans l'espace de Fourier autour d'une fréquence arbitraire $f_0 > 0$: la version dilatée (ou comprimée) $a^{1/2}\Psi(af)$ se localise autour de la fréquence $f_a = f_0/a > 0$. Ainsi, lorsque le paramètre d'échelle a varie continûment entre zéro et l'infini, la fréquence modale f_a explore entièrement l'axe \mathcal{R}_+^* des fréquences. Cet exemple montre en fait qu'il est légitime de faire correspondre au paramètre d'échelle a une fréquence caractéristique f_a strictement positive, moyennant l'identification formelle $a = f_0/f_a$. Cette identification pourra également sous certaines conditions [RIO 92], s'étendre aux représentations temps-fréquence $\rho_z(t, f)$ covariantes par les transformations du

groupe affine (11), dont certaines s'interprètent tout aussi bien comme des représentations temps-échelle $\rho_z(t, a)$. On passe alors de l'une à l'autre de ces écritures en posant, sans perte de généralité, $f_0 = 1$, $a = 1/f$, et en n'oubliant pas la mesure associée $da = df/f^2$. Attention pourtant, cette identification n'est pas sans conséquence sur la définition (4) des formes bilinéaires affines dont il convient à présent de limiter les bornes d'intégration au quart de plan $\mathcal{R}_+^* \times \mathcal{R}_+^*$.

De la même façon on pourrait établir à partir de la formulation temporelle de l'opérateur de dilatation (11) ($b = 0$), une correspondance formelle entre le paramètre d'échelle a et un temps caractéristique $t = at_0 > 0$ ($t_0 > 0$ étant choisi arbitrairement comme origine des temps). ♣

2.3. Classe Affine des représentations temps-fréquence

Le principe de covariance affine étant posé, il s'agit à présent d'identifier parmi l'ensemble des formes bilinéaires (3) ou (4), les représentations temps-fréquence covariantes par translation en temps et changement d'échelle. La classe affine des représentations temps-fréquence qui résulte de cette restriction a été étudiée, sensiblement à la même période, par deux équipes [BER 85, BER 92] et [FLA 90, FLA 91, RIO 92], et suivant deux approches originales et indépendantes. Mais, bien que les résultats obtenus dans les deux cas procèdent de motivations relativement éloignées, ce qui les distingue tient essentiellement à un choix initial arbitraire de paramétrisation du noyau K . Nous avons pris ici le parti de reproduire ces travaux dans un cadre unifié, tout en n'hésitant pas, chaque fois que cela est nécessaire, à adopter la paramétrisation qui soit se prête mieux à l'interprétation d'un résultat, soit ouvre une perspective plus générale.

Reprenons alors la transformation affine (12) dans laquelle on développe $\rho_z(t, f)$ sous sa forme générique fréquentielle (4). La contrainte de covariance se traduit au niveau du noyau \widehat{K} par l'égalité

$$\widehat{K}(f_1, f_2, t, f) = a\widehat{K}\left(af_1, af_2, \frac{t-b}{a}, af\right) e^{i2\pi b(f_1-f_2)}.$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute valeur de b et de a , et donc en particulier pour $b = t$ et $a = 1/f$ (on utilise l'identification $a = f_0/f$ avec $f_0 = 1$)

$$\widehat{K}(f_1, f_2, t, f) = \frac{1}{f}\widehat{K}\left(\frac{f_1}{f}, \frac{f_2}{f}, 0, 1\right) e^{i2\pi t(f_1-f_2)}.$$

Cette relation montre que le noyau \widehat{K} se réduit à une forme ne dépendant plus que de deux variables (au lieu de quatre) que l'on notera par la suite

$\widehat{K}(f_1, f_2; 0, 1) = \widehat{K}(f_1, f_2)$. En reportant le noyau ainsi déterminé dans la forme générale (4), on obtient alors le résultat suivant :

La classe affine [BER 91, RIO 92] désignant l'ensemble des représentations bilinéaires temps-fréquence covariantes par translation en temps et changement d'échelle est définie par la forme paramétrique suivante

$$\rho_Z(t, f) = f \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{K}(f_1, f_2) Z\left(\frac{f_1}{f_0} f\right) Z^*\left(\frac{f_2}{f_0} f\right) e^{2i\pi f t (f_1 - f_2)} df_1 df_2, \quad (13)$$

où $\widehat{K}(f_1, f_2)$ est un noyau symétrique, $\widehat{K}(f_1, f_2) = \widehat{K}(f_2, f_1)$, et réel. Sans perte de généralité, on posera par la suite $f_0 = 1$.

Encore une fois, rappelons qu'il existe d'autres paramétrisations possibles de cette classe. Par exemple, si l'on introduit le nouveau noyau

$$\psi(\xi, \nu) = \widehat{K}\left(\nu - \frac{\xi}{2}, \nu + \frac{\xi}{2}\right), \quad |\xi| < 2\nu, \quad (14)$$

l'expression (13) devient

$$\rho_Z(t, f) = f \int_{-2\nu}^{2\nu} \int_{-2\nu}^{2\nu} \psi(\xi, \nu) Z\left(f\left(\nu - \frac{\xi}{2}\right)\right) Z^*\left(f\left(\nu + \frac{\xi}{2}\right)\right) e^{-2i\pi\xi f t} d\xi d\nu. \quad (15)$$

A cette autre formulation de la classe affine, on peut associer trois autres écritures corollaires, faisant usage pour cela de transformations de Fourier partielles sur les variables du noyau $\psi(\xi, \nu)$ [FLA 93]

$$\psi(\xi, \nu) = \int \Pi(u, \nu) e^{-i2\pi\xi u} du, \quad (16)$$

$$= \int \phi(\xi, \tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau, \quad (17)$$

$$= \iint F(u, \tau) e^{-i2\pi(\xi u - \nu\tau)} du d\tau. \quad (18)$$

Selon la paramétrisation retenue (*fréquence-fréquence* (14), *temps-fréquence* (16), *fréquence-temps* (17) ou *temps-temps* (18)), les versions de (15) correspondantes (quoique formellement équivalentes) sont autant d'interprétations possibles de la classe affine. Ainsi, l'expression de la classe affine construite sur le noyau *temps-fréquence* $\Pi(u, \nu)$ met en lumière le rôle central de la distribution de Wigner-Ville (10) puisqu'alors

$$\rho_Z(t, f) = \iint W_Z(u, \nu) \Pi\left(f(u - t), \frac{\nu}{f}\right) du d\nu. \quad (19)$$

L'opération de corrélation affine qui apparaît dans cette expression appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, elle montre que la distribution de Wigner-Ville est elle-même une distribution de la classe affine, pour laquelle $\Pi(u, \nu) = \delta(u)\delta(\nu-1)$. Appartenant par ailleurs à la classe de Cohen (9), la distribution de Wigner vérifie ainsi des propriétés de covariance relative à une extension à trois paramètres du groupe affine : translation en temps, translation en fréquence et changement d'échelle. Un calcul élémentaire montre ensuite que seule la covariance affine est naturellement préservée par cette corrélation affine :

$$\begin{aligned} \rho_{z,a,b}(t, f) &= \iint W_z\left(\frac{u-b}{a}, a\nu\right) \Pi\left(f(u-t), \frac{\nu}{f}\right) du d\nu \\ &= \iint W_z(u', \nu') \Pi\left(af\left(u' - \frac{t-b}{a}\right), \frac{\nu'}{af}\right) du' d\nu' \\ &= \rho_z(a^{-1}(t-b), af). \end{aligned}$$

Il n'est donc pas surprenant que toute distribution ρ , résultant du *filtrage affine* de la distribution de Wigner par une quelconque fonction de paramétrisation Π appartienne systématiquement à la classe affine. Par contre, on peut s'étonner de la réciproque selon laquelle *toute* distribution de la classe affine peut s'interpréter comme un *filtrage affine* de la représentation de Wigner. Il convient alors de souligner deux points. D'une part, l'arbitraire dans le choix de la nouvelle paramétrisation (14) pourrait tout aussi bien aboutir sur une autre distribution *génératrice* de la classe affine. À cet égard, non seulement la distribution de Wigner ne joue pas un rôle unique, mais on peut montrer [FLA 93] que toute distribution affine $\rho_z(t, f)$ en correspondance bijective avec le signal analysé, peut engendrer la classe affine suivant un schéma similaire à celui de la relation (19). D'autre part, il n'existe aucune restriction *a priori* sur la structure du noyau Π , ce qui laisse une liberté de choix bien au delà du cadre des noyaux de lissage (type passe-bas). Comme nous le verrons en particulier, certains *noyaux bi-fréquentiels localisés* (structures oscillantes) correspondent à des éléments de la classe affine qui, par leurs propriétés, sont très éloignés de la distribution de Wigner.

La fonction d'ambiguïté bande-étroite (ou fonction d'ambiguïté de Woodward [WOO 53]) est liée à la distribution de Wigner par une double transformation de Fourier

$$A_z(\xi, \tau) := \int z\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{2i\pi\xi u} du, \quad (20)$$

$$= \iint W_z(t, f) e^{i2\pi(\xi t + f\tau)} dt df. \quad (21)$$

Cette autre forme quadratique sur le signal donne lieu à une nouvelle définition canonique de la classe affine, duale de (19), et mettant en scène la version

fréquence-temps (17) du noyau de paramétrisation

$$\rho_z(t, f) = f \iint A_z(\xi, \tau) \phi\left(\frac{\xi}{f}, f\tau\right) e^{-2i\pi\xi t} d\xi d\tau. \quad (22)$$

Enfin, citons une dernière écriture équivalente de (19) :

$$\rho_z(t, f) = f \iint x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) F(f(u-t), f\tau) du d\tau. \quad (23)$$

Basée sur l'expression *temps-temps* (18) du noyau de paramétrisation, celle-ci révèle le lien qui existe entre les représentations temps-fréquence affines et une fonction de corrélation locale du signal. En effet, si pour fixer les idées on suppose le noyau $F(u, \tau)$ de type passe-bas suivant la variable u et oscillant dans la direction de τ , on peut interpréter l'intégrale

$$\gamma_x(\tau; t, f) = \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) F(f(u-t), f\tau) du,$$

comme un estimateur à fenêtre glissante (ou à court-terme) de la fonction d'auto-corrélation du signal x . L'intégrale oscillante portant sur la variable τ s'identifie quant à elle à un filtrage passe-bande (de même nature qu'une transformée de Fourier) appliqué à cette fonction d'autocorrélation locale. Le caractère affine de ces *spectres évolutifs*, et ce qui les distingue des représentations temps-fréquence de la classe de Cohen, tient au paramètre f en préfacteur des variables du noyau de convolution $F(u, \tau)$. Celui-ci introduit une dépendance fonctionnelle entre les caractéristiques de l'estimateur (résolutions en temps et en fréquence) et l'échelle d'analyse $1/f$.

3. Les Propriétés de la Classe Affine

Quelle que soit la forme paramétrique retenue pour la définition de la classe affine, nous allons montrer au travers de quelques exemples, qu'imposer une propriété sur ρ se traduit toujours en termes de contrainte structurelle sur le noyau de paramétrisation. Grâce à cette correspondance, il devient relativement facile d'isoler au sein de la classe affine les distributions vérifiant une combinaison donnée de propriétés souhaitées en résolvant le système de contraintes associées. Notons toutefois que certaines de ces conditions d'admissibilités sur le noyau pouvant s'exclure mutuellement, le système peut ne pas avoir de solution, signifiant ainsi qu'il n'existe pas de représentation temps-fréquence de la classe affine satisfaisant au cahier des charges défini.

En retenant au cas par cas la paramétrisation se prêtant le mieux à l'interprétation du résultat, nous présentons maintenant quelques exemples de couples propriétés-contraintes (on pourra se reporter à [BER 92] et [RIO 92] pour une liste plus complète de ceux-ci).

3.1. Énergie

La contrainte (6) garantissant que les formes bilinéaires génériques conservent l'énergie du signal, peut être précisée dans le cadre affine. Ainsi, les distributions ρ_z de la classe affine vérifient la condition de conservation d'énergie $\iint \rho_z(t, f) dt df = E_z$, si et seulement si le noyau associé satisfait la relation

$$\int \frac{\psi(0, \nu)}{|\nu|} d\nu = 1. \quad (24)$$

3.2. Marginales

Sans débattre des problèmes que soulève entre autres la non positivité des représentations temps-fréquence, on peut comme pour la classe de Cohen, interpréter les distributions affines vérifiant (24) comme des densités (au sens *probabiliste*) d'énergie. La densité spectrale $\gamma_z(f)$ (resp. la puissance instantanée $P_z(t)$) étant également une distributions fréquentielle (resp. temporelle) de l'énergie de z , on peut désirer que l'intégration des distributions temps-fréquence $\rho_z(t, f)$ selon la variable temps (resp. fréquence) coïncide avec la distribution marginale γ_z (resp. P_z). Dans chacun de ces cas, il existe alors une contrainte structurelle associée au noyau de la distribution :

marginales en fréquence :

$$\int \rho_z(t, f) dt = \gamma_z(f) \Leftrightarrow \psi(0, \nu) = \delta(\nu - 1) \quad (25)$$

marginales en temps :

$$\int \rho_z(t, f) df = P_z(t) \Leftrightarrow \int \phi\left(\frac{\xi}{f}, f\tau\right) df = \delta(\tau) \quad (26)$$

Par définition, il suffit que l'une des deux marginales soit exacte pour entraîner automatiquement la propriété de conservation d'énergie.

3.3. Unitarité

Les distributions de la classe affine sont des applications bilinéaires de l'espace vectoriel $L^2(\mathcal{R}, dt)$ ‡ une dimension des signaux d'énergie finie vers l'espace vectoriel $L^1(\mathcal{R}^2, dt df)$ à deux dimension. Chacun de ces espaces est muni d'un produit scalaire (et d'une mesure de Haar associée), et bien qu'il ne puisse exister d'application (même non-linéaire) mettant en correspondance bijective ces

deux espaces, il est possible d'identifier, dans le cas présent au sein de la classe affine, des distributions qui laissent invariantes les distances en préservant les produits scalaires de chacun des espaces. Pour ces distributions, dites *unitaires* ou encore *isométriques*, on a alors l'égalité suivante :

$$\iint \rho_{z_1}(t, f) \rho_{z_2}(t, f) dt df = \left| \int z_1(t) z_2^*(t) dt \right|^2 \quad (27)$$

laquelle entraîne en particulier la conservation de l'énergie (l'implication réciproque étant clairement fausse). Partant de la formulation (22) de la classe affine, celle-ci implique alors la condition sur le noyau de paramétrisation :

$$f^2 \int \phi\left(\frac{\xi}{f}, f\tau\right) \phi^*\left(\frac{\xi}{f}, f\tau'\right) df = \delta(\tau - \tau') \quad \forall \xi. \quad (28)$$

On vérifie aisément que le noyau associé à la distribution de Wigner

$$\Pi(u, \nu) = \delta(u) \cdot \delta(\nu - 1) \xrightarrow{\mathcal{F}} \phi(\xi, \tau) = e^{-i2\pi\tau},$$

vérifie cette condition.

L'égalité (27), appelée encore *formule de Moyal* [MOY 49], est une passerelle mathématique intéressante, qui permet de transposer en bloc l'ensemble des résultats établis en théorie du filtrage linéaire (Wiener, adapté,...) à l'espace des représentations temps-fréquence. À titre d'exemple, considérons la transformation linéaire

$$T_z(t, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int z(u) \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) du, \quad (t, a) \in \mathcal{R} \times \underset{+}{\mathcal{R}}^*, \quad (29)$$

avec ψ , une fonction oscillante telle que $\int \psi(t) dt = 0$, et raisonnablement localisée en temps et en fréquence (dans la limite du principe d'incertitude de Gabor-Heisenberg). Nous allons montrer que la puissance instantanée en sortie de ce filtre, bien connu dans la littérature sous le nom de *transformée en ondelettes continue*, appartient à la classe affine des représentations temps-fréquence. En effet, en appliquant la formule de Moyal (27) à la distribution de Wigner (ou à toute autre distribution unitaire de la classe affine), et en faisant usage du principe de covariance affine (12), il vient

$$\begin{aligned} S_z(t, f) &= \left| T_z\left(t, a \equiv \frac{1}{f}\right) \right|^2 \\ &= \iint W_z(u, \nu) W_{\psi_{f^{-1}, t}}(u, \nu) du d\nu \\ &= \iint W_z(u, \nu) W_{\psi}\left(f(u-t), \frac{\nu}{f}\right) du d\nu, \end{aligned} \quad (30)$$

où l'on reconnaît sans peine un cas spécifique de forme paramétrique (19) avec $\Pi = W_\psi$. On appelle *scalogramme* la distribution affine S_z ainsi définie.

Enfin, soulignons que pour intéressante qu'elle soit la propriété d'unitarité est très structurante, et se paie souvent par l'exclusion d'autres propriétés théoriques, et souvent aussi par un manque de lisibilité/interprétabilité des représentations associées.

3.4. Localisation

L'étude de transitoires et plus généralement l'identification de structures très localisées dans le plan temps-fréquence, a sans aucun doute été un élément moteur dans le développement des techniques d'analyse temps-fréquence. À cet égard, on peut donc motiver le choix de représentations qui respectent la localité temporelle (respectivement fréquentielle) d'une impulsion temporelle (respectivement d'un signal harmonique pur). Pour chacun de ces deux cas, on écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \text{localisation en temps} & Z_{t_0}(f) = e^{-i2\pi f t_0} \quad \rightarrow \quad \rho_z(t, f) = \frac{1}{f} \delta(t - t_0), \\ \text{localisation en fréquence} & Z_{f_0}(f) = \delta(f - f_0) \quad \rightarrow \quad \rho_z(t, f) = \delta(f - f_0), \end{array}$$

correspondant respectivement aux conditions suivantes sur le noyau \hat{K} de la paramétrisation :

$$\text{localisation en temps} \quad \Leftrightarrow \quad \int \hat{K}(f_1, f_1 - f_2) \, df_1 = 1, \quad (31)$$

$$\text{localisation en fréquence} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{K}(f, f) = \delta(f - 1). \quad (32)$$

Bien que ce ne soit pas la seule dans ce cas, la distribution de Wigner (10) définie sur les signaux réels², vérifie ces deux conditions de localisation temporelle et fréquentielle. Cependant, elle possède une propriété supplémentaire de localisation sur les signaux † retard de groupe linéaire $\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{df}(f) = t_0 + \alpha f$ (*chirps linéaires*), qui lui confère un statut d'intérêt particulier [AUG 01, FLA 01] :

$$Z(f) = \exp\{i\Phi(f)\} \longrightarrow W_z(t, f) = \delta(t + \tau_g(f)).$$

On peut alors chercher à étendre ce principe de localisation à des expressions de retards de groupes plus générales, et établir la contrainte sur les noyaux de paramétrisation affine pour qu'il en soit ainsi. Le cadre théorique rigoureux

²Dans [BER 92] l'étude de la classe affine est restreinte aux signaux analytiques ($Z(f) \equiv 0, \forall f \leq 0$). Les arguments techniques qui y sont alors développés excluent *stricto sensu* la distribution de Wigner de l'ensemble des solutions vérifiant la localisation temporelle.

d'une telle extension nécessite toutefois de restreindre la définition de la classe affines à l'espace de Hardy des signaux analytiques (i.e. $\{Z(f) : Z(f) \equiv 0, f < 0\}$), ce qui rappelle le, exclut la distribution de Wigner de l'ensemble des solutions admissibles. Ce faisant, on cherche alors à caractériser les distributions ρ telles que :

$$Z(f) = \frac{Y(f)}{\sqrt{f}} \exp i\Phi(f) \longrightarrow \rho_z(t, f) = \frac{Y(f)}{f} \delta \left(t + \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{df}(f) \right).$$

Par un calcul direct, on obtient alors une équation fonctionnelle qui lie la structure du noyau $\widehat{K}(u, v)$ (ou de façon équivalente $\psi(\xi, \nu)$) à l'expression du spectre de phase $\Phi(f)$ selon

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \frac{\widehat{K}(u, u-v)}{(u(u-v))^{-1/2}} e^{i\psi(fu) - i\psi(f(u-v))} du = e^{-ifv \frac{d\psi}{df}(f)}, \\ \int_{\frac{|\xi|}{2}}^{+\infty} \frac{\psi(\xi, \nu)}{(\nu^2 - \frac{\xi^2}{4})^{-1/2}} e^{i\psi(f(\nu-\xi/2)) - i\psi(f(\nu-\xi/2))} d\nu = e^{-i\xi f \frac{d\psi}{df}(f)}. \end{array} \right. \quad (33)$$

La résolution en \widehat{K} (ou en ψ) de ces équations est difficile et n'admet pas systématiquement de solution pour un choix arbitraire du spectre de phase $\Phi(f)$. L'étude analytique complète de ce problème, traitée dans [BER 92], montre en fait que seule une certaine famille paramétrée de spectres $\{\Phi_k\}_{k \in Z}$ donne lieu à une sous-classe de solutions $\rho \in \{P^{(k)}\}_{k \in Z}$ localisées. Avant de reproduire dans ses grandes lignes la démonstration de ce résultat, précisons un peu plus le contexte dans lequel elle se place.

Remarque 3. La localisation de ρ sur un retard de groupe $\tau_g(f)$ donné, peut être vue comme un sous-produit du couplage de la propriété de localisation temporelle (31) à celle de covariance par un opérateur supplémentaire. Or, ce troisième opérateur, défini par l'anamorphose qui transforme l'impulsion $\delta(f - f_0)$ dans le plan temps-fréquence en la trajectoire $\tau_g(f)$, n'a de sens mathématique que si l'extension du groupe affine (translation en temps et changement d'échelle) à trois paramètres qui en résulte, garde une structure de Lie [BER 92]. L'existence et l'identification des distributions localisées $P^{(k)}$ s'apparente donc à l'étude des groupes de Lie affine à trois paramètres et des représentations dans le plan de phase associé. ♣

Remarque 4. L'ensemble des solutions \widehat{K} de (33) constituent une sous-classe de fonctions qui se distinguent par une forme diagonale de noyaux :

$$\widehat{K}(u, v) = \mu(u)\delta(v - \lambda(u)), \quad (34)$$

où μ et λ sont des fonctions réelles qui à leur tour fixent les propriétés des distributions ρ associées, et notamment celles de localisation sur un retard de groupe donné. ♣

Remarque 5. Comme nous l'avons déjà précisé, il existe une équivalence stricte entre les différentes formes de paramétrisation de la classe affine. Ainsi, on pourrait indifféremment choisir de résoudre le problème de localisation sur des retards de groupes non linéaire $\tau_g(f)$, en résolvant en $\psi(\xi, \nu)$ la fonctionnelle (33), et suivre ainsi l'approche de [RIO 92]. Il s'avère en fait que si les solutions ainsi obtenues possèdent bien des structures diagonales

$$\psi(\xi, \nu) = G(\xi)\delta(\nu - H(\xi)), \quad (35)$$

du même type de (34), on ne connaît les expressions analytiques des fonctions réelles G et H que pour un petit nombre de cas particuliers de $\{\Phi_k\}_{k=-1,0,1/2,2}$. Nous reviendrons sur ces cas singuliers. ♣

4. Distributions de Wigner affines

Indépendamment de la propriété de localisation sur des trajectoires non linéaires de retards de groupe, on peut s'intéresser à la sous-classe des distributions affines caractérisée par une forme diagonale de noyaux (34) et (35).

4.1. Forme Diagonale des noyaux

Cette approche consiste à se restreindre à des formes diagonales du noyau qui permettent de réduire l'expression (13) à une expression beaucoup plus simple qui n'est plus définie que par une seule intégrale.

Lorsque ce noyau $\widehat{K}(v, v')$ est choisi comme :

$$\widehat{K}(v, v') = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u) \delta(v - \lambda(u)) \delta(v' - \lambda(-u)) du,$$

qui est d'expression générale $\widehat{K}(v, v') = g(v) \delta(v' - f(v))$, avec la fonction λ continue et bijective de \mathcal{R} sur \mathcal{R}_+^* et la fonction μ assurant le caractère réel et symétrique du noyau \widehat{K} , on obtient par deux intégrations successives sur v et v' , une famille de distributions particulières, appelées Distributions Affines de Wigner et données par la forme suivante :

$$P(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u) Z(f\lambda(u)) Z^*(f\lambda(-u)) e^{2i\pi f t(\lambda(u) - \lambda(-u))} du. \quad (36)$$

4.1.1. *Propriétés des Distributions à Noyau Diagonal \widehat{K}*

Les distributions $P(t, f)$ donnée en (36) doivent vérifier certaines contraintes pour garantir les propriétés suivantes :

- La contrainte de marginalisation temporelle donnée par l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t, f) dt = |Z(f)|^2$ se traduit par les conditions suivantes sur les fonctions $\mu(u)$ et $\lambda(u)$:

$$\begin{cases} \frac{\mu(0)}{2\lambda'(0)} = 1 \\ \lambda(0) = 1 \end{cases} \quad (37)$$

- La contrainte d'unitarité des distributions déjà donnée en (27) se traduit par l'égalité suivante :

$$\mu(u) = \sqrt{|\lambda'(u) + \lambda'(-u)|} \sqrt{|\lambda'(-u)\lambda(u) + \lambda'(u)\lambda(-u)|}.$$

- La contrainte de localisation $P(t, f) = \delta(f - f_0)$ sur les signaux monochromatiques $Z(f) = \delta(f - f_0)$ est donnée par la même relation (37) que pour la condition de marginalisation.
- La contrainte de localisation $P(t, f) = \frac{1}{f} \delta(t - t_0)$ sur signaux localisés en temps $Z(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} e^{-2i\pi f t_0} Y(f)$ est donnée par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \text{ la correspondance } u \longrightarrow \lambda(u) - \lambda(-u) \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \bullet \mu(u) = \sqrt{\lambda(u)\lambda(-u)} |\lambda'(u) + \lambda'(-u)|. \end{cases}$$

Si l'on cherche les distributions affines unitaires et localisables sur les signaux localisés en temps, il est nécessaire que la fonction $\mu(u)$ vérifie à la fois les deux conditions données plus haut. La fonction $\lambda(u)$ doit alors vérifier :

$$\frac{d}{du} (\lambda(u) - \lambda(-u)) = \frac{d}{du} \log \left(\frac{\lambda(u)}{\lambda(-u)} \right),$$

ce qui conduit au résultat : $\lambda(u) = \frac{u e^{u/2}}{2 \sinh u/2}$ et $\mu(u) = \sqrt{\lambda(u)\lambda(-u)}$. La distribution affine unitaire localisable est alors donnée par $P^{(0)}(t, f)$ d'expression :

$$P^{(0)}(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{2 \sinh u/2} Z \left(\frac{u f e^{-u/2}}{2 \sinh u/2} \right) Z^* \left(\frac{u f e^{u/2}}{2 \sinh u/2} \right) e^{-2i\pi f t u} du. \quad (38)$$

Cette distribution joue pour les distributions affines de Wigner un rôle comparable à celui de Wigner-Ville pour la classe de Cohen.

4.1.2. *Formes Diagonales du Noyau Π*

En procédant de la même manière que pour les distributions à noyau diagonal \widehat{K} , il est possible, à partir de la forme (19), de choisir le noyau Π diagonal, c'est à dire parfaitement localisable (au sens du Dirac) sur des courbes $\nu = H(\xi)$ des l'espace (ξ, ν) .

Les noyaux $\psi(\xi, \nu)$ ou $f(\xi, \tau)$ doivent alors être choisis de la forme :

$$\psi(\xi, \nu) = G(\xi) \delta(\nu - H(\xi)) \longrightarrow f(\xi, \tau) = G(\xi) e^{-2i\pi H(\xi)\tau},$$

où les deux fonctions G et H sont réelles. Cette nouvelle classe définit alors une sous-classe des distributions affines, appelées Distributions Affines de Wigner et est alors définie par :

$$P(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) Z \left(f \left(H(\xi) - \frac{\xi}{2} \right) \right) Z^* \left(f \left(H(\xi) + \frac{\xi}{2} \right) \right) e^{-2i\pi \xi f t} d\xi.$$

Il est à noter que l'utilisation d'un signal analytique conduit nécessairement, pour l'obtention de la formule précédente, à la condition : $H(\xi) \geq \left| \frac{\xi}{2} \right|$.

4.1.3. *Propriétés des Distributions à Noyau Diagonal Π*

La contrainte d'unitarité (27) sur la distribution conduit à la contrainte suivante sur G et H :

$$G^2(\xi) = H(\xi) - \xi \frac{dH(\xi)}{d\xi}.$$

La contrainte de localisation $P(t, f) = \frac{1}{f} \delta(t - t_0)$ sur des courbes du type $X(f) = Y(f) f^{-1/2} e^{2i\pi f t_0}$ conduit à :

$$G^2(\xi) = H^2(\xi) - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2.$$

Si l'on impose les deux dernières contraintes, il faut résoudre une équation différentielle qui donne l'expression des deux fonctions H et G :

$$\begin{cases} H(\xi) = \left(\frac{\xi}{2} \right) \coth \left(\frac{\xi}{2} \right), \\ G(\xi) = \frac{\xi/2}{\sinh \xi/2}. \end{cases}$$

et on tombe sur l'expression de la distribution unitaire $P^{(0)}(t, f)$ déjà rencontrée en (38).

4.2. Covariance par le Groupes affine à Trois Paramètres

Pour restreindre encore la classe de solutions données par (13), on peut imposer à ces distributions d'être covariantes par certains groupes à trois paramètres plus généraux contenant le groupe affine A [BER 91, BER 92]. Ces groupes G_k sont labélés par un réel k et sont caractérisés par leurs éléments $g = (a, b, c)$ et $g' = (a', b', c')$ qui agissent selon la loi de composition :

$$\begin{aligned} gg' &= (aa', b + ab', c + a^k c') \quad \text{pour } G_k, k \neq 1 \\ gg' &= (aa', b + ab' + a(\ln a), c + ac') \quad \text{pour } G_1. \end{aligned}$$

Puisque les distributions (13) sont déjà construites sur la contrainte de covariance par le groupe affine de paramètres (a, b) , il suffit qu'elles ne respectent que la covariance par rapport au troisième paramètre c . L'action de ces groupes G_k pour $g = (1, 0, c)$ agit sur les signaux analytiques $Z(f)$ selon :

$$\begin{aligned} Z^g(f) &= e^{-2i\pi c f^k} Z(f) \quad \text{pour } k \neq 0, 1 \\ Z^g(f) &= \sqrt{a} e^{-2i\pi c \ln f} Z(f) \quad \text{pour } k = 0 \\ Z^g(f) &= \sqrt{a} e^{-2i\pi c f \ln f} Z(f) \quad \text{pour } k = 1. \end{aligned}$$

La covariance sur la distribution temps-fréquence se traduit par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z(f) & \longrightarrow & Z^g(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_Z(t, f) & \longrightarrow & \rho_{Z^g}(t, f) = \rho_Z(g^{-1} \cdot (t, f)) \end{array}$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \rho_{Z^g}(t, f) &= \rho_Z(t - kcf^{k-1}, f) \quad \text{pour } k \neq 0, 1 \\ \rho_{Z^g}(t, f) &= \rho_Z\left(t - \frac{c}{f}, f\right) \quad \text{pour } k = 0 \\ \rho_{Z^g}(t, f) &= \rho_Z(t - c - c \ln f, f) \quad \text{pour } k = 1. \end{aligned}$$

4.2.1. Construction des distributions $P^{(k)}$

Cette méthode conduit à la détermination d'une grande famille de distributions $P^{(k)}(t, f)$ indicées par un réel k , appelées Distributions Affines de Wigner

et définies par :

$$P^{(k)}(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(u) Z(f\lambda_k(u)) Z^*(f\lambda_k(-u)) e^{2i\pi f t(\lambda_k(u) - \lambda_k(-u))} du, \quad (39)$$

avec la fonction λ_k donnée par :

$$\lambda_k(u) = \left[k \frac{e^{-u} - 1}{e^{-ku} - 1} \right]^{\frac{1}{k-1}}.$$

Cette fonction est définie par continuité pour les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$. Pour tout k , les fonctions $\lambda_k(u)$ vérifient les propriétés :

$$\lambda_k(u) = e^u \lambda_k(-u) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_k(0) = 1 \\ \lambda'_k(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction μ est arbitraire mais doit être réelle et positive. Si l'on impose la propriété relative à la réversibilité du temps, elle doit être une fonction paire.

4.2.2. Propriétés des Distributions $P^{(k)}$

La plupart des propriétés de la classe affine à noyau diagonal ont été explicitées au paragraphe 4 et il suffit de choisir dans ces résultats le cas particulier où $\lambda(u) = \lambda_k(u)$.

Pour $k = 2$, on retrouve la distribution de Wigner-Ville restreinte ici aux signaux analytiques :

$$W_Z(t, f) = \int_{-2f}^{2f} Z\left(f - \frac{v}{2}\right) Z^*\left(f + \frac{v}{2}\right) e^{-2i\pi tv} dv.$$

Le cas $k = 0$ correspond à la distribution affine unitaire donnée en (38). Le cas $k = -1$ correspond à la distribution active d'Unterberger [UNT 84] :

$$U_Z(t, f) = f \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh(u/2) Z\left(f e^{u/2}\right) Z^*\left(f e^{-u/2}\right) e^{-4i\pi ft \sinh u/2} du. \quad (40)$$

Les distributions $P^{(k)}$, pour $k \leq 0$, localisent parfaitement les signaux analytiques à lois de retard de groupe hyperboliques :

$$Z(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} e^{-2i\pi c f^k} e^{-2i\pi f t_0} Y(f) \xrightarrow{k \leq 0} P^{(k)}(t, f) = f^{-1} \delta\left(t - t_0 - kc f^{k-1}\right), \quad (41)$$

$$Z(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} f^{-2i\pi\beta} e^{-2i\pi f t_0} Y(f) \xrightarrow{k=0} P^{(0)}(t, f) = f^{-1} \delta\left(t - t_0 - \frac{\beta}{f}\right). \quad (42)$$

4.3. Distributions Pseudo-Wigner Affines Lissées

4.3.1. Limites des distributions de Wigner affine

Les représentations temps-fréquence affines définies par la forme quadratique (en le signal analysé) (39) offrent un panel très complet de propriétés théoriques intéressantes. S'agissant par exemple de résolution conjointe dans le plan temps-fréquence, elles atteignent des degrés de localisation (notamment sur leur retard de groupe propre ((41) et (42)) qui dépassent largement le potentiel offert par le scalogramme (module carré d'une décomposition en ondelettes). Exploité dans des schémas de *détection dans le plan temps-fréquence*, ce pouvoir de concentration conduit à des structures de détecteurs simples et très souples, et dont les performances sont proches de celles du filtrage adapté [GON 97].

En contre-partie de cela, un certain nombre de difficultés théoriques et numériques, ont constitué un frein au développement naturel et à la diffusion de ces outils.

D'un point de vue théorique tout d'abord, la forme bilinéaire (39) ne respecte pas le principe de superposition. En effet, la distribution de Wigner affine $P^{(k)}$ évaluée sur une somme de signaux³ fait apparaître, en plus des auto-termes (A-T), des termes croisés (C-T) issus de l'interaction des composantes deux à deux :

$$\begin{aligned}
 z_i(t) &\rightarrow P_{z_i}^{(k)}(t, f) \\
 z(t) = \sum_{i=1}^N c_i z_i(t) &\rightarrow P_z^{(k)}(t, f) = \\
 &\underbrace{\sum_{i=1}^N |c_i|^2 P_{z_i}^{(k)}(t, f)}_{\text{A-T}} + 2\text{Re} \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j^* P_{z_i, z_j}^{(k)}(t, f) \right\}}_{\text{C-T}}.
 \end{aligned}$$

La présence inévitable de ces termes interférentiels, bien qu'indispensable au respect de certaines propriétés théoriques, dégrade considérablement la lisibilité des représentations, notamment lorsqu'il s'agit de signaux complexes multicomposantes. Dans [FLA 96], une étude détaillée des termes interférentiels a permis d'identifier les principes géométriques de leur construction, ainsi qu'une caractérisation fine de leur structure oscillante. On y apprend notamment que la géométrie qui sous-tend les distributions de Wigner affines est totalement régie par un principe de moyennes généralisées (de type Stolarsky), et dont

³Dans cette somme, chaque composante correspond à un signal localisé en temps et/ou en fréquence, de sorte que les supports de ces *atomes* soit raisonnablement disjoints.

les retards de groupe hyperboliques (41) constituent précisément les lieux de points fixes.

S'agissant à présent de l'implémentation numérique des formes (39), on doit faire face à deux difficultés supplémentaires. Tout d'abord, l'intégrale définissant $P^{(k)}(t, f)$ en chaque instant t (resp. chaque fréquence f), correspond à une mesure globale sur l'ensemble du signal $Z(f)$ (ou $z(t)$). Il sera donc difficile dans ces conditions de traiter des "signaux longs", relativement à la taille de mémoire dont est doté le calculateur. Une approximation à *temps glissant* de (39) est alors nécessaire si l'on veut s'affranchir de la limite "signaux courts". L'autre difficulté numérique, moins pénalisante toutefois, tient à l'invertibilité analytique de la fonction $\xi_k(u) := \lambda_k(u) - \lambda_k(-u)$. En effet, pour optimiser le temps de calcul, on interprète l'intégrale oscillante (39) définissant $P^{(k)}$, comme une simple transformation de Fourier mettant en dualité les variables (t, f) et $\xi_k(u)$. Pour profiter des performances d'une transformée de Fourier rapide (e.g. FFT), il est donc nécessaire que la fonction réciproque $u = \xi_k^{-1}(\xi_k(u))$ admette une expression formelle⁴, ce qui n'est vrai que pour $k \in \{-1, 0, 1/2, 2, \pm\infty\}$ [BER 92, FLA 96].

4.3.2. Définition

L'approche proposée dans [GON 96, GON 98] pour définir les distributions *Pseudo-Wigner Affines Lissées* profite largement de l'analogie existant entre la classe de Cohen [AUG 01] et la classe affine. En particulier, le principe de fenêtrage à court-terme retenu est une adaptation affine de la démarche conduisant aux distributions *Pseudo-Wigner Lissées* de la classe de Cohen [CLA 80, STA 94].

Réécrivons donc l'expression (39) donnant la distribution de Wigner affine, pour faire apparaître l'expression temporelle du signal analysé :

$$P_z^{(k)}(t, f) = f \int \mu_k(u) \left[\int z(\tau) e^{-i2\pi\lambda_k(u)f(\tau-t)} d\tau \right] \times \left[\int z(\tau') e^{-i2\pi\lambda_k(-u)f(\tau'-t)} d\tau' \right]^* du.$$

Dans chacune des deux intégrales de Fourier mises en jeu, on limite l'extension temporelle du signal en le pré-fenêtrant par une fonction à court-terme h :

⁴Lorsque ξ^{-1} n'admet pas de forme analytique, on peut utiliser une table de correspondance, au prix d'approximations supplémentaires.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_z^{(k)}(t, f) := & f \int \mu_k(u) \left[\int z(\tau) h[f\lambda_k(u)(\tau - t)] e^{-i2\pi\lambda_k(u)f(\tau-t)} d\tau \right] \\ & \times \left[\int z(\tau') h[f\lambda_k(-u)(\tau' - t)] e^{-i2\pi\lambda_k(-u)f(\tau'-t)} d\tau' \right]^* du. \end{aligned}$$

Notons que dans cette expression, le support temporel de la fenêtre h est directement lié à la fréquence d'analyse f , garantissant que la distribution $\tilde{P}^{(k)}$ ainsi définie est bien covariante par changement d'échelle. En posant ensuite la fonction oscillante $\psi(\tau) = h(\tau) e^{i2\pi\tau}$, les *Distributions Pseudo-Wigner Affines* (DPWA) s'écrivent simplement :

$$\tilde{P}_z^{(k)}(t, f) = \int \frac{\mu_k(u)}{\sqrt{\lambda_k(u)\lambda_k(-u)}} T_z(t, \lambda_k(u)f) T_z^*(t, \lambda_k(-u)f) du, \quad (43)$$

où $T_z(t, f \equiv a^{-1})$ n'est autre que la décomposition en ondelettes donnée par (29). En introduisant le pré-traitement $z(t) \rightarrow T_z(t, f)$ préalablement au calcul de la forme quadratique, on agit simultanément sur les trois faiblesses qui pénalisent les distributions de Wigner affines :

- le support temporel de la fenêtre d'apodisation $|\psi|$ limite les interactions à longue portée dans le signal et réduit ainsi les interférences entre composantes disjointes en temps ;
- agissant comme une fenêtre glissante, la convolution (29) remplace dans (43) la transformée de Fourier initialement présente dans (39). De manière globale, la mesure intégrale devient locale et s'implémente avec un algorithme *en ligne* qui ne souffre plus de la limite "signaux courts" ;
- la structure de l'ondelette ψ intègre directement l'exponentielle oscillante caractérisée par l'expression $\exp\{i2\pi\lambda_k(u)ft\}$. L'existence d'une forme analytique pour ξ_k^{-1} n'est donc plus un obstacle à la programmation rapide de $\tilde{P}^{(k)}$, quelle que soit la valeur du paramètre k .

Remarque 6. Alors que le scalogramme (30) s'obtient simplement en élevant au carré le module d'une transformée en ondelettes, les DPWA étendent ce principe à une auto-corrélation affine généralisée de la transformée en ondelettes suivant l'axe des fréquences. ♣

La fenêtre à court-terme h en pré-facteur du signal analysé z supprime par effet de lissage (à surtension constante⁵) les termes interférentiels qui oscillent dans la direction de f . Les termes croisés issus de l'interaction entre composantes disjointes en fréquence, oscillent quant à eux suivant la variable t et

⁵Pour une ondelette ψ , on définit le coefficient de surtension comme la fréquence moyenne du gabarit $|\Psi(f)|^2$, rapportée à la largeur de bande équivalente.

ne sont par conséquent pas affecté par la transformation en ondelettes. Pour atténuer ces composantes, il faut introduire une fenêtre de lissage temporel. Moralement, la variable produit $(t \cdot f)$ est duale⁶ de la variable u dans (39) : limiter le support d'intégration en u revient à appliquer à $\tilde{P}^{(k)}$ un lissage *affine* en temps. Soit alors la fonction passe-bas réelle $G(u)$, les *distributions pseudo-Wigner affines lissées* s'écrivent :

$$\tilde{P}_x^{(k)}(t, f) = \int G(u) \frac{\mu_k(u)}{\sqrt{\lambda_k(u)\lambda_k(-u)}} D_x(t, \lambda_k(u)f) D_x^*(t, \lambda_k(-u)f) du. \quad (44)$$

Ainsi, grâce à la séparation entre lissage dû à G et lissage dû à ψ , on peut régler indépendamment les résolutions temporelle et fréquentielle de $\tilde{P}^{(k)}$, ce qui n'est évidemment pas possible avec le scalogramme. Mais cet atout n'est pas nouveau, car déjà dans [RIO 92], les auteurs avait introduit une alternative au scalogramme, les *distributions Pseudo-Wigner-Ville Lissées Affines à noyaux séparables*, qui déjà offrait cette même souplesse dans le choix de la résolution conjointe. On ne sera donc pas surpris de constater que les représentations définies en (44) généralisent ce principe à toutes les valeurs du paramètre k ; le cas traité dans [RIO 92] est un exemple particulier de Pseudo-Wigner Affine Lissée $\tilde{P}^{(k)}$ pour lequel $k = 2$.

Soulignons enfin, que la suppression des interférences a un coût. En l'occurrence, en supprimant les termes oscillants (interférences) des distributions bilinéaires, on condamne *stricto sensu* un certain nombre de propriétés théoriques qui, paradoxalement, était l'attrait principal des distributions de Wigner affine (39). Au premier plan, la localisation stricte sur des trajectoire hyperboliques (41) du plan temps-fréquence ne peut pas être maintenue. Toutefois, les pseudo-Wigner affines (43) convergeant exactement vers les distributions de Wigner affine (39) lorsque le coefficient de surtension de l'ondelette ψ tend vers l'infini, on peut approcher cette propriété de concentration (ainsi que toutes les autres) avec le degré de précision voulu.

La figure 1 illustre sur un exemple de synthèse, les différences entre une distribution de Wigner Affine $P^{(2)}$, les distributions Pseudo-Wigner Affine et Pseudo-Wigner Affine Lissée correspondantes $\tilde{P}^{(2)}$, et un scalogramme S .

Pour les aspects pratiques *d'implémentation numérique*, autant que pour d'autres considérations plus théoriques comme les *distributions génératrices de la classe affine*, nous invitons le lecteur intéressé à se reporter à [GON 96, GON 98], où une étude détaillée de ces objets est proposée.

⁶La variable $(t \cdot f)$ est plus exactement en dualité de Fourier avec la variable $v = \xi_k(u)$, mais la fonction ξ_k étant strictement monotone, limiter l'extension de la variable u équivaut à limiter l'extension de $\xi_k(u)$.

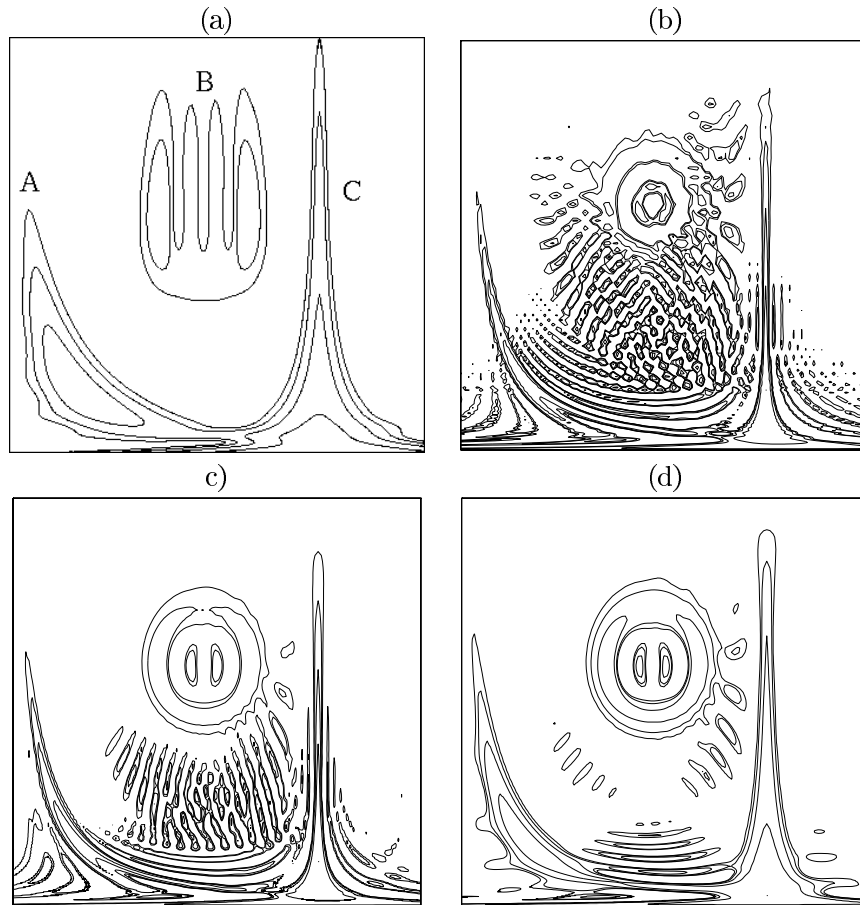


Figure 1 – Représentations temps-fréquence affine d'un signal test composé d'une modulation hyperbolique $X_A(f) = e^{i2\pi\alpha \ln f}$ (composante notée A), une fonction d'Hermite de degré 3 (composante B), et d'une singularité lipschitzienne $x_C(t) = |t-t_0|^{-0.1}$ (composante C). Les représentations sont affichées en ligne d'iso-contours, l'axe des abscisses correspond au temps et celui des ordonnées à la fréquence. (a) Scalogramme $S_z(t, f)$ avec une ondelette de Morlet ψ de coefficient de surtension $Q = 2$. (b) Distribution Unitaire de Bertrand $P_z^{(0)}(t, f)$. (c) Distribution pseudo-Bertrand $\tilde{P}_z^{(0)}(t, f)$ avec une ondelette de Morlet $Q = 8$. (d) Distribution pseudo-Bertrand lissée avec la même ondelette et une fenêtre gaussienne G . Les distributions Pseudo-Wigner Affines Lissées (44), permettent une transition continue entre la version faible résolution mais sans interférence du scalogramme et la version "haute-résolution", riche en interférences des Wigner affines (39).

5. Considérations Avancées

5.1. Principe de Tomographie

Il a été montré que certaines distributions temps-fréquence de la classe de Cohen ou de la Classe Affine ne sont pas de véritables densités d'énergie car elles ne sont pas partout positives dans le plan temps-fréquence. Néanmoins, lorsqu'elles possèdent des marginales positives sur le temps et sur la fréquence, il est possible d'établir que ces distributions possèdent des marginales positives sur des courbes du plan temps-fréquence autres que l'axe temporel ou fréquentiel. Pour ce faire, il suffit d'appliquer les déformations du groupe des translations en temps et en fréquence pour la classe de Cohen ou du groupe affine pour les distributions affines sur la variable temps et la variable fréquence.

5.1.1. Tomographie de Wigner-Ville

On peut montrer que la distribution de Wigner-Ville peut être considérée comme une densité d'énergie positive sur des courbes bien déterminées du plan temps-fréquence : les droites. Ceci peut facilement se montrer en utilisant la propriété d'unitarité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) W_{z_1}(t, f) dt df = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) z_1^*(t) dt \right|^2,$$

avec $z_1(t) = \exp(i\pi(at^2 + 2bt + c))$ définissant un signal *chirp* général. Il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) \delta(f - at - b) dt df = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-i\pi at^2} e^{-2i\pi bt} dt \right|^2.$$

Le premier membre n'est autre que la transformation de Radon [LUD 66] de la distribution temps-fréquence tandis que le second membre représente le produit scalaire du signal et du signal *chirp* général caractérisé par sa pente a et son ordonnée à l'origine b . Ainsi une transformation de Radon sur une distribution de Wigner-Ville d'un signal n'est autre qu'un filtrage adapté sur ce signal par une famille de chirps. La mise en place numérique de la transformation de Radon est une transformée de Hough, très utilisée en théorie de l'image pour détecter la présence de lignes droites dans une image.

5.1.2. Tomographie de Distribution de Wigner Affine

On peut montrer que la distribution affine unitaire $P^{(0)}(t, f)$ définie par (38) peut être considérée comme une densité d'énergie positive sur des courbes bien déterminées du plan temps-fréquence : les hyperboles [BER 85]. Ceci peut facilement se montrer en utilisant la propriétés d'unitarité :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_Z^{(0)}(t, f) P_{Z_1}^{(0)}(t, f) dt df = \left| \int_0^{+\infty} Z(f) Z_1^*(f) df \right|^2,$$

pour $Z_1(f) = f^{-2i\pi\beta-1/2} e^{-2i\pi f\xi} Y(f)$ définissant un signal à retard de groupe *hyperbolique*. Il vient :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_Z^{(0)}(t, f) \delta\left(t - \xi - \frac{\beta}{f}\right) dt df = \left| \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta-1/2} df \right|^2. \quad (45)$$

Le premier membre n'est autre que la transformation de Radon généralisée de la distribution temps-fréquence affine unitaire $P^{(0)}(t, f)$ tandis que le second membre représente le produit scalaire entre le signal $Z(f)$ et les signaux hyperboliques : cette transformation définit la transformation de Mellin [OVA 92a, BER 95] du signal qui joue un rôle très important dans toute l'étude ou le calcul de ces distributions. Cette transformation permet de pouvoir calculer numériquement et de manière rapide les distributions de Wigner Affines.

Pour certaines distributions $P^{(k),M}$ de Wigner affines définies pour $\mu^M(u) = \sqrt{\lambda_k(u) \lambda_k(-u)}$, on peut montrer [BER 91], en généralisant la propriété de localisations des signaux hyperboliques et la propriété d'unitarité, que ces distributions possèdent des marginales positives définies par :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(k),M}(t, f) \delta(t - \xi - k\beta f^{k-1}) dt df = \left| \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} e^{2i\pi\beta f^k} \frac{df}{\sqrt{f}} \right|^2.$$

5.2. Opérateurs et Groupes

Bien que les problèmes pouvant être résolus par les représentations temps-fréquence et temps-échelle soient nombreux, il existe des cas où l'analyse temps-fréquence ou temps-échelle classique ne suffit plus ou n'est plus appropriée. Ces

problèmes nécessitent alors d'être résolus par d'autres type de distributions : les représentations conjointes construites sur d'autres types de variables.

5.2.1. Méthodes de Construction

Deux types de construction de ces distributions conjointes peuvent être proposés :

- **Les méthodes de covariance :**

Une représentation $P[Z]$ est *covariante* sous une transformation T de signal si $P[TZ]$ se déduit de $P[Z]$ par un simple changement de variable. Par exemple, les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen sont covariantes par les translations de temps et de fréquence (voir paragraphe 2.2.1 et le chapitre [AUG 01] : traduire un signal en temps et fréquence revient à traduire sa représentation temps-fréquence. Les représentations temps-échelle sont covariantes par translation de temps et changement d'échelle (voir paragraphe 2.2.2 et les équations (11) et (12)) : traduire et changer d'échelle un signal revient à traduire et à changer d'échelle sa représentation associée.

Les opérations de translations de temps-fréquence ou de translation et de temps et de changement d'échelle possèdent la propriété spéciale d'être des représentations unitaires de groupe. Les translations de temps et de fréquence sont associées au *groupe de Weyl-Heisenberg*, les translations de temps et les changements d'échelle sont associés au *groupe Affine*.

- **Les méthodes des marginales :**

Une représentation $P[Z](t, f)$ d'un signal Z satisfait la marginale $M[Z](\beta)$ si son intégrale calculée sur une certaine courbe $\beta = g(t, f)$ de l'espace de représentation (t, f) de $P[Z]$ donne $M[Z]$:

$$\int \int P[Z](t, f) \delta(\beta - g(t, f)) dt df = M[Z](\beta) \quad (46)$$

Exemples :

- Certaines distributions temps-fréquence possèdent des marginales égales à la puissance instantanée $P_z(t) = |z(t)|^2$ ou à la densité spectrale d'énergie $\gamma_Z(f) = |Z(f)|^2$ (voir le chapitre [AUG 01]). Les courbes $\beta = g(t, f)$ sont respectivement des droites fréquentielles $f = g(t, f)$ et temporelles $t = g(t, f)$.
- Certaines distributions temps-échelle possèdent des marginales égales à la densité spectrale d'énergie $\gamma_Z(f)$ ou la densité de puissance $M^s[Z](\beta)$ dans l'espace de Mellin (voir (45) et le paragraphe 5.4). Les courbes $\beta = g(t, f)$ sont respectivement des droites temporelles $t = g(t, f)$ et des

hyperboles $\beta = tf$. Les constructions par marginales sont équivalentes à une forme particulière de tomographie temps-fréquence : connaissant les marginales, on détermine les distributions qui les satisfont.

Certaines distributions temps-fréquence ou temps-échelle possèdent à la fois des propriétés de covariance et de marginales : la distribution de Wigner-Ville et la distribution unitaire (38) en sont des exemples.

Il existe des théories générales pour construire des représentations conjointes par la méthode de covariance ou par la méthode des marginales. On peut synthétiser les résultats comme suit :

- Les méthodes des marginales peuvent générer des distributions conjointes à partir de n'importe quel couple de marginales [SCU 87, COH 95, COH 96, BAR 98a, BAR 98b, BAR 96a]. Néanmoins, la plupart de ces distributions ne possèdent pas de propriétés utiles de covariance.
- Les méthodes de covariance, par définition, créent des distributions conjointes à partir de propriétés de covariance désirées [BAR 95a, BAR 96a, SAY 96c, SAY 96a, SAY 96b]. Pourtant, il n'existe des distributions covariantes que pour un nombre très limité de couples de marginales [BAR 96b].

L'intersection entre les distributions covariantes et celles qui possèdent des marginales peut être caractérisée par ce que l'on nomme *l'équivalence unitaire*.

5.2.2. Les Distributions Unitairement Équivalentes

Deux opérateurs A et B sont unitairement équivalents si ils sont reliés par [BAR 95b, BAR 98b] :

$$B = U^{-1}AU. \quad (47)$$

Faire agir l'opérateur U sur le signal Z avant de calculer sa distribution conduit à la représentation $P[UZ]$, qui est covariante par les opérateurs

$$T' = U^{-1}TU. \quad F' = U^{-1}FU. \quad (48)$$

La distribution $P[UZ]$ possédera alors les marginales

$$\int P[UZ](t', f') df' = |U\{Z\}(t')|^2, \quad (49)$$

$$\int P[UZ](t', f') dt' = \int Z(t) U^{-1}\{e^{i2\pi f' t}\} dt. \quad (50)$$

Ainsi, toute distribution covariante par des opérateurs unitairement équivalents aux opérateurs translation de temps et de fréquence conduit de manière unique,

à un changement de variable près, à une distribution temps-fréquence appartenant à la classe de Cohen [BAR 95b]. Toutes les propriétés de la classe de Cohen en découlent, le seul changement étant l'action de U sur le signal [BAR 95b]. Cette propriété change le problème potentiellement difficile de caractérisation de distribution en un simple exercice de transformation de variable. Ceci est encore vrai dans le cas des distributions temps-échelle ou avec les opérateurs temps-échelle

5.3. *Autres Classes de Distributions*

Il est possible de construire d'autres classes de distributions en imposant des diagrammes de covariance donnés. Par exemple, en reprenant le cas de la construction de la classe de distributions covariantes par le groupe à trois paramètres G_k contenant le groupe affine du paragraphe 4.2, on peut ainsi déterminer la classe de distributions ne respectant que la covariance par compression et par translation de temps hyperbolique (42) : c'est la classe hyperbolique [PAP 93]. Cette classe, qui n'est néanmoins pas covariante par translation de temps, contient évidemment la distribution affine unitaire (38). La classe covariante par compression et par translation temporelle de loi de puissance (41) constitue la classe de puissance [HLA 99] qui n'est pas covariante par translation de temps mais qui contient toutes les distributions $P^{(k)}$ (39).

5.4. *Algorithmes de Calcul et Outils*

On remarque que les formes données par (39) sont très lourdes à mettre en œuvre. Leur calcul numérique par des méthodes classiques et à partir d'une série d'échantillons du signal nécessite l'interpolation des échantillons avant intégration. Toutes ces opérations sont très gourmandes en temps de calcul. La transformation de Mellin est un outil qui permet alors de rendre plus souple et plus rapide le calcul numérique de ces distributions [OVA 92b].

La transformation de Mellin est définie sur le signal analytique $Z(f)$ par la relation :

$$M^\xi[Z](\beta) = \int_0^{+\infty} Z(f) e^{2i\pi\xi f} f^{2i\pi\beta+r} df, \quad (51)$$

ainsi que par sa forme réciproque :

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z](\beta) e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1} d\beta.$$

Les paramètres réels r et ξ sont respectivement relatifs au dimensionnement du signal et à un temps de référence. Cette transformation est unitaire, c'est à dire qu'elle conserve le produit scalaire entre les deux espaces :

$$\int_0^{+\infty} Z_1(f) Z_2^*(f) f^{2r+1} df = \int_{-\infty}^{+\infty} M^\xi[Z_1](\beta) M^{\xi*}[Z_2](\beta) d\beta. \quad (52)$$

Cette transformation peut être interprétée comme le coefficient de la décomposition du signal $Z(f)$ sur une base de signaux hyperboliques $Z^\xi(f, \beta)$ définis par :

$$Z^\xi(f, \beta) = e^{-2i\pi\xi f} f^{-2i\pi\beta-r-1},$$

dont la loi de retard de groupe est caractérisée par l'équation $t = \xi + \beta/f$.

La principale propriété de la transformation de Mellin est la propriété d'invariance aux changements d'échelle :

$$\begin{array}{ccc} Z(f) & \xrightarrow{U_\xi} & U_\xi Z(f) = a^{r+1} e^{-2i\pi\xi(1-a)f} Z(af) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^\xi[Z](\beta) & \longrightarrow & M^\xi[U_\xi Z](\beta) = a^{-2i\pi\beta} M^\xi[Z](\beta). \end{array}$$

C'est cette propriété d'invariance d'échelle qui, associée à la conservation du produit scalaire, va permettre de réécrire dans l'espace de Mellin des formes intégrales faisant intervenir des dilatations de signaux.

Toutes les propriétés importantes qui ont permis de construire la transformation discrète et de donner une interprétation de la variable β (paramètre d'hyperbole $t = \xi + \beta/f$ dans le plan temps-fréquence) peuvent être consultées dans [BER 90, BER 95]. Le support du signal dans l'espace de Mellin peut être déterminé à l'aide de l'interprétation de la construction tomographique (45) de la distribution affine unitaire $P^{(0)}(t, f)$ définie en (38). Cette relation montre que le carré du module de la transformée de Mellin du signal Z est égal à l'intégrale de sa représentation temps-fréquence affine $P^{(0)}(t, f)$ sur un

réseau d'hyperboles indexées par β dans le plan temps-fréquence (transformation de Radon généralisée). Ainsi, lorsque le signal est localisé en temps et en fréquence, il existe un certain paramètre β_0 à partir duquel l'intégrale de $P^{(0)}(t, f)$ devient nulle. La transformée de Mellin d'un signal localisé en temps et en fréquence est donc elle-même localisée. Si le signal est localisé dans le plan temps-fréquence (largeur de bande B autour de la fréquence centrale f_0 , durée T), il est possible de déterminer le support β_0 par $\beta_0 = (f_0 + B/2)T/2$. La transformation de Mellin peut être alors discrétisée en respectant un théorème d'échantillonnage. Cette transformée s'écrit :

$$M^\xi[Z]\left(\frac{p}{N \ln q}\right) = \ln q \sum_{k=L}^{L+N-1} q^{k(r+1)} e^{2i\pi\xi q^k} Z(q^k) e^{2i\pi\frac{kp}{N}},$$

où $0 \leq p \leq N - 1$ et L vérifie $q^L = f_1$ avec f_1 fréquence min de Z .

La transformée de Mellin est ainsi calculée sur les échantillons fréquentiels du signal en progression géométrique par un simple algorithme rapide de Transformée de Fourier discrète. La raison géométrique q d'échantillonnage du signal Z doit vérifier une condition de non recouvrement : $\frac{1}{\ln q} \geq 2\beta_0$ où $[-\beta_0, \beta_0]$ est le support de $M^\xi[Z](\beta)$. Le nombre de points N qui caractérisent parfaitement $M^\xi[Z]$ est alors :

$$N \geq BT \left(\frac{1}{2} + \frac{f_0}{B} \right) \ln \frac{1 + \frac{f_0}{2B}}{1 - \frac{f_0}{2B}}.$$

Si le signal est à bande étroite, on peut remarquer que toutes les dilatations deviennent de simples translations fréquentielles, que la transformée de Mellin devient transformée de Fourier, et que le nombre de points N nécessaire pour un non recouvrement tend vers le produit BT du critère de Nyquist.

La méthode de construction algorithmique de la forme (38) peut être consultée dans [OVA 92b]. Elle peut être étendue sans problème pour le calcul des distributions (39) ou d'autres distributions faisant intervenir des effets de dilatations.

6. Conclusions

Les distributions temps-fréquence liées au groupe affine ont été initialement développées pour analyser les signaux dits *large-bande* comme les signaux im-

pulsionnels utilisés en géologie, les signaux issus du contrôle non destructif des matériaux (vibrations, chocs) ou de la mécanique des fluides utilisés en turbulence. De manière générale, le premier enseignement que l'on peut tirer est que ces distributions large bande généralisent les distributions classiques bande étroite. Cette généralisation doit être comprise dans le sens où chaque distribution générale large bande converge vers son analogue bande étroite lorsque les signaux ont des largeurs de bande relatives très faibles. C'est ainsi le cas des représentations temps-fréquence affines et de ses régularisées associées (transformation en ondelette) qui tendent, en bande étroite, vers la représentation de Wigner-Ville et sa régularisée (transformation de Fourier à court terme, transformation de Gabor. C'est aussi le cas pour la fonction d'ambiguïté large bande qui tend, à bande étroite, vers la fonction d'ambiguïté de Woodward. L'esprit de ces recherches était donc d'étendre, pour les signaux large bande, la théorie classique et les outils proposés pour l'analyse des signaux bande étroite. Ces techniques, relativement récentes, encore mal connues et peu employées de par leur complexité, devraient connaître un regain d'intérêt auprès des chercheurs puisqu'elles constituent actuellement des axes privilégiés de recherche encore ouverts.

Références

- [AUG 01] F. AUGER ET E. CHASSANDE-MOTTIN. Analyse temps-fréquence quadratique i : La classe de cohen. In F. HLAWSCH ET F. AUGER ET J.P. OVARLEZ, ed, *TEMPS-FREQUENCE : CONCEPTS ET OUTILS*. Hermès, 2001.
- [BAR 95a] R.G. BARANIUK ET L. COHEN. On joint distributions of arbitrary variables. *IEEE Signal Proc. Letters*, 2(1) :10–12, Jan. 1995.
- [BAR 95b] R.G. BARANIUK ET D.L. JONES. Unitary equivalence : A new twist on signalprocessing. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 43(10) :2269–2282, Oct. 1995.
- [BAR 96a] R.G. BARANIUK. Covariant time-frequency representations through unitary equivalence. *IEEE Signal Proc. Letters*, 3(3) :79–81, Mar. 1996.
- [BAR 96b] R.G. BARANIUK. A limitation of the kernel method for joint distributions of arbitrary variables. *IEEE Signal Proc. Letters*, 3(2) :51–53, Feb. 1996.
- [BAR 98a] R.G. BARANIUK. Beyond time-frequency analysis : Energy densities in one and many dimensions. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 46(9) :2305–2314, Sept. 1998.
- [BAR 98b] R.G. BARANIUK. Joint distributions of arbitrary variables made easy. *Multidim. Syst. Signal Proc.*, 9(4) :341–348, Oct. 1998. Special issue on time-frequency analysis.
- [BER 85] J. BERTRAND ET P. BERTRAND. Représentation des signaux à large bande. *La Recherche Aérospatiale*, (5) :277–283, Sept.-Oct. 1985.
- [BER 90] J. BERTRAND, P. BERTRAND ET J.P. OVARLEZ. Discrete mellin transform for signal analysis. In *IEEE, Int. Conf. Acoust. Speech and Sig. Proc.*, 1990. Albuquerque (NM), USA.

- [BER 91] J. BERTRAND ET P. BERTRAND. Affine time-frequency distributions. In B. BOASHASH, ed, *Time Frequency Signal Analysis. Methods and Applications*. Longman Cheshire, 1991.
- [BER 92] J. BERTRAND ET P. BERTRAND. A class of affine wigner functions with extended covariance properties. *J. Math. Phys.*, 33(7), 1992.
- [BER 95] J. BERTRAND ET P. BERTRAND AND J.P. OVARLEZ. The mellin transform. In A. D. POULARIKAS, ed, *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press Inc., 1995.
- [CLA 80] T.A.C.M. CLAASEN ET W.F.G. MECKLENBRÄUKER. The wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis - part i : Continuous time signals. *Philips J. Res.*, 35(3) :217–250, 1980.
- [COH 66] L. COHEN. Generalized phase-space distribution functions. *J. of Math. Physics*, 7(5) :781–786, May 1966.
- [COH 95] L. COHEN. *Time-Frequency Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [COH 96] L. COHEN. A general approach to obtaining joint representations in signal analysis — Part I : Characteristic function operator method. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 44(5) :1080–1090, May 1996.
- [FLA 90] P. FLANDRIN ET O. RIOUL. Affine smoothing of the wigner-ville distribution. In *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, pages 2455–2458, 1990. Albuquerque (NM), USA.
- [FLA 91] P. FLANDRIN. Sur une classe générale d’extensions affines de la distribution de wigner-ville. In *13ème Coll. GRETSI*, pages 17–20, 1991. Juan-Les-Pins, France.
- [FLA 93] P. FLANDRIN. *Temps-Fréquence*. Hermès, 1993.
- [FLA 96] P. FLANDRIN ET P. GONÇALVÈS. Geometry of affine time-frequency distributions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3, 1996.
- [FLA 01] P. FLANDRIN. Temps-fréquence énergétique : Quelques introductions. In F. HLAWATSCH ET F. AUGER ET J.P. OVARLEZ, ed, *TEMPS-FREQUENCE : CONCEPTS ET OUTILS*. Hermès, 2001.
- [GON 96] P. GONÇALVÈS ET R. BARANIUK. A pseudo-bertrand distribution for time-scale analysis. *IEEE Trans. Signal Proc. Letters*, 3(3), March 1996.
- [GON 97] P. GONÇALVÈS, P. FLANDRIN ET E. CHASSANDE-MOTTIN. Time-frequency methods in time-series data analysis. In P. HELLO M. DAVIER, ed, *Second Workshop on GravitationalWave Data Analysis*, pages 35–46. Frontières, 1997.
- [GON 98] P. GONÇALVÈS ET R. BARANIUK. Pseudo affine wigner distributions : Definition and kernel formulation. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 46(6) :2305–2314, June 1998.
- [GRO 84] A. GROSSMANN ET J. MORLET. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4) :723–736, 1984.
- [HLA 99] F. HLAWATSCH, A. PAPANDREOU ET G.F. BOUDREAUX-BARTELS. The power classes-quadratic time-frequency representations with scale covariance and dispersive time-shift covariance. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, SP-47 :3067–3083, Nov. 1999.

- [LUD 66] D. LUDWIG. The radon transform on euclidean space. *Communication On Pure and Applied Mathematics*, XIX :49–81, 1966.
- [MAL 89] S. MALLAT. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, PAMI-11(7) :674–693, 1989.
- [MAN 68] B. MANDELBROT ET J.W. VAN NESS. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM rev.*, 10(4) :422–437, 1968.
- [MOY 49] J.E. MOYAL. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45 :99–124, 1949.
- [OVA 92a] J.P. OVARLEZ. *La Transformation de Mellin : un Outil pour l'Analyse des Signaux à Large-Bande*. PhD thesis, Thèse de Université Paris 6, Paris, France, 1992.
- [OVA 92b] J.P. OVARLEZ, J. BERTRAND ET P. BERTRAND. Computation of affine-time frequency representations using the fast mellin transform. In *IEEE, Int. Conf. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, 1992. San-Francisco (CA), USA.
- [PAP 93] A. PAPANDREOU, F. HLAWATSCH ET G.F. BOUDREAUX-BARTELS. The hyperbolic class of quadratic time-frequency representations - part i : Constant- q warping, the hyperbolic paradigm, properties and members. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, SP-41(12), 1993.
- [RIO 92] O. RIOUL ET P. FLANDRIN. Time-scale energy distributions : A general class extending wavelet transform. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, SP-40(7) :1746–1757, 1992.
- [SAY 96a] A.M. SAYEED ET D.L. JONES. A canonical covariance-based method for generalized joint signal representations. *IEEE Signal Proc. Letters*, 3(4) :121–123, April 1996.
- [SAY 96b] A.M. SAYEED ET D.L. JONES. Equivalence of generalized joint signal representations of arbitrary variables. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 44(12), Dec. 1996.
- [SAY 96c] A.M. SAYEED ET D.L. JONES. Integral transforms covariant to unitary operators and their implications for joint signal representations. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 44(6) :1365–1377, June 1996.
- [SCU 87] M.O. SCULLY ET L. COHEN. Quasi-probability distributions for arbitrary operators. In Y. S. KIM ET W. W. ZACHARY, eds, *Proceedings of Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometric Quantization, and Wigner Functions*, pages 253–263. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [STA 94] L. STANKOVIĆ. A method for time-frequency analysis. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42 :225–229, Jan. 1994.
- [UNT 84] A. UNTERBERGER. The calculus of pseudo-differential operators of fuchs type. *Comm. in Part. Diff. Eq.*, 9 :1179–1236, 1984.
- [WOO 53] P.M. WOODWARD. *Probability and Information with Applications to Radar*. Pergamon, London (UK), 1953.